

## EL PENSAMIENTO PROPORCIONAL Y LA FORMACIÓN DE SUBJETIVIDADES EN EL AULA: UNA APROXIMACIÓN AL ESTADO DEL ARTE

PROPORTIONAL THINKING AND THE FORMATION OF SUBJECTIVITIES IN THE  
CLASSROOM: AN EXPLORATION TO THE STATE OF THE ART

O PENSAMENTO PROPORCIONAL E A FORMAÇÃO DE SUBJETIVIDADES NA SALA  
DE AULA: UMA APROXIMAÇÃO AO ESTADO DA ARTE

Rafael Moreno León 

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

*Recibido: 07/02/2023 – Aceptado: 04/08/2023 – Publicado: 14/08/2023*

*Remita cualquier duda sobre esta obra a: Rafael Moreno León.*

*Correo electrónico: [rmorenol@udistrital.edu.co](mailto:rmorenol@udistrital.edu.co)*

### RESUMEN

Las investigaciones sobre el pensamiento proporcional han estado centradas en tres grupos de estudio: las variables de orden cognitivo y de contexto; la estructura matemática; y lo antropológico y lo semiótico. En estas investigaciones, la influencia de Piaget ha marcado cierta caracterización sobre el pensamiento proporcional, como un aspecto que marca el paso de las operaciones concretas a las formales. Los posteriores enfoques constructivistas han sido influenciados por la noción kantiana del conocimiento matemático y su postura idealista filosófica de esta forma de pensamiento, centrando la atención en el sujeto que aprende bajo principios universalistas, ahistóricos y aculturales. Una nueva perspectiva de pensamiento proporcional, de tipo neovigotskiana (materialista dialéctica), podría considerar al individuo mediante su praxis y la alteridad, facilitando así formas de colaboración humana en el aula. Desde la Teoría de la Objetivación, esta práctica matemática se basa en una ética comunitaria, conformada por: la responsabilidad, el cuidado por el otro y el compromiso por el trabajo conjunto. Este tipo de relación ética entre los sujetos podría considerar el papel de la creación de subjetividades en la emergencia del pensamiento proporcional, para tratar de superar los enfoques centrados en el individuo dentro del campo de investigación.

**Palabras clave:** Teoría de la Objetivación; Pensamiento proporcional; Ética comunitaria; Actividad matemática.

### ABSTRACT

Research on proportional thinking has focused on three groups of study: cognitive and contextual variables; mathematical structure; and anthropological and semiotic aspects. In these investigations, the influence of Piaget has marked a certain characterization of proportional thinking, as an aspect that marks the passage from concrete

to formal operations. Later constructivist approaches have been influenced by the Kantian notion of mathematical knowledge and its philosophical idealist stance on this form of thinking, focusing attention on the subject who learns under universalistic, ahistorical and acultural principles. A new perspective of proportional thinking, of a neo-Vigotskian (dialectical materialist) type, could consider the individual through his praxis and otherness, thus facilitating forms of human collaboration in the classroom. From the Theory of Objectification this mathematical practice is based on a communitarian ethics, conformed by: responsibility, care for the other and commitment to work together. This type of ethical relationship between subjects could consider the role of the creation of subjectivities in the emergence of proportional thinking, in an attempt to overcome individual-centered approaches within the research field.

**Keywords:** Theory of Objectification; Proportional thinking; Community ethics; Math activity.

## RESUMO

As pesquisas sobre o pensamento proporcional têm-se centrado em três grupos de estudo: as variáveis cognitivas e contextuais; a estrutura matemática; e as antropológicas e semióticas. Nestas pesquisas, a influência de Piaget marcou uma certa caracterização do pensamento proporcional como um aspecto que marca a passagem das operações concretas às operações formais. As abordagens construtivistas posteriores foram influenciadas pela noção kantiana de conhecimento matemático e por sua posição filosófica idealista sobre esta forma de pensamento, centrando a atenção no sujeito que aprende sob princípios universalistas, a-históricos e aculturais. Uma nova perspectiva neo-vigotskiana (materialista dialética) do pensamento proporcional poderia considerar o indivíduo através de sua praxis e de sua alteridade, facilitando assim formas de colaboração humana na sala de aula. A partir da Teoria da Objetivação, esta prática matemática baseia-se em uma ética comunitária, constituída por: a responsabilidade, o cuidado com o outro e o compromisso pelo trabalho conjunto. Este tipo de relação ética entre sujeitos poderia considerar o papel da criação de subjetividades na emergência do pensamento proporcional, em uma tentativa de ultrapassar abordagens centradas no indivíduo no campo da pesquisa.

**Palavras-chave:** Teoria da Objetivação; Pensamento proporcional; Ética comunitária; Atividade matemática.

## INTRODUCCIÓN

En este artículo queremos mostrar una aproximación al estado del arte de una investigación doctoral en curso; en ella indagamos por cuáles son las relaciones que vinculan la emergencia del pensamiento proporcional y las formas de interacción social en un aula de quinto grado de la Educación Primaria, mediada por una ética de orientación comunitaria. Para ello, se han revisado ciertos antecedentes necesarios para el estudio en cuestión, pero analizados desde la Teoría de la Objetivación (TO) y sus principios fundantes (Gobara & Radford, 2020; Radford, 2017a, 2018), con la intención de discutir algunos aspectos referidos a la constitución de este tipo de pensamiento y sus posibles relaciones con la creación de subjetividades en el aula.

En cuanto a la constitución del pensamiento proporcional en los escolares, en la investigación se deben considerar las formas de producción de saber en el aula. Al respecto, observamos que su análisis es un asunto teórico-filosófico; por ello, desde la TO consideramos algunos elementos ontológicos y epistemológicos que nos brinda esta perspectiva de investigación. Desde esta mirada es fundamental para

la articulación de sus constructos teóricos establecer *qué es el saber, en qué consiste su naturaleza y cómo llegamos a saber* (Radford, 2017b, 2020).

No obstante, en la revisión de antecedentes, luego de la consulta bibliográfica en bases de datos y en diálogo con expertos en la TO, no hemos encontrado desde esta perspectiva investigativa un estudio similar sobre el pensamiento proporcional. Por ello, hemos tomado como guía para nuestro trabajo los tres momentos propuestos por Obando *et al.* (2014), en relación a la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad (RPP). Estos autores, al referenciar casi 60 años de investigaciones sobre el tema, en su estado del arte proponen tres grandes grupos de estudios: *a) Los procesos cognitivos, b) La estructura matemática y c) Lo antropológico y lo semiótico.*

Luego de analizar estos tres momentos, nos enfocaremos en los estudios que abordan el pensamiento proporcional en primaria. En el estudio principal se quiere vincular el desarrollo de esta forma de pensamiento, como un apoyo del algebraico, aprovechando las posibilidades didácticas que permite el enfoque del Early Algebra de Kaput y Blanton (2000). Recordemos que el pensamiento proporcional surge en el quinto grado y se consolida hasta el noveno grado de la Educación Básica colombiana (MEN, 2006; Moreno *et al.*, 2017; Obando *et al.*, 2014). Por tanto, nos resulta interesante el hecho de estudiar la manera cómo surge en el ámbito escolar esta forma de pensamiento, además del vínculo que tiene con el pensamiento algebraico y con el conocimiento informal de los escolares sobre las RPP, particularmente en el quinto grado de la Educación Básica escolar.

Por otro lado, en lo referido a la creación de subjetividades en el aula, vemos en este conocimiento informal de los estudiantes sobre las RPP una estrecha relación con este aspecto; en consecuencia, se hace pertinente considerar cierto tipo de interacción social entre los sujetos (aparte del tipo de sujeto) que facilite formas de colaboración entre los estudiantes en el aula, dada la marcada orientación en los diferentes enfoques del campo de la Educación Matemática hacia el saber y no hacia el ser (Miranda & Vergel, 2020), olvidando un asunto crucial en las formas de relación entre los sujetos, la ética. Es por esto que incorporamos dentro de la revisión de investigaciones aquellas que abordan el asunto de la ética en el aula de matemáticas, para decantarnos por una de orientación comunitaria, acorde a los principios filosóficos de la TO.

Finalmente, ponemos en discusión ciertas cuestiones teóricas referidas a la noción de pensamiento imperante dentro del campo de la Educación Matemática; esta dimensión generalmente es asociada a la psicología genética de Piaget. Desde la TO el pensamiento se conceptualiza como actividad reflexiva y sensible mediada por los signos; es así como se refleja y se materializa en acciones corporales como: gestos, en cierto tipo de lenguaje y en general, por diversos medios semióticos (Radford, 2006, 2014). Consideramos fundamental la categoría de pensamiento dentro de nuestro trabajo, dado que el sujeto es analizado desde la TO a partir de la actividad, en concordancia con la postura materialista dialéctica de Marx, porque creemos que el conocimiento debe ser considerado a partir de la praxis y no de formas a priori, como lo sugiere Kant desde su filosofía.

## ANTECEDENTES

A continuación, se revisarán los tres momentos sobre investigaciones referidas a la enseñanza y el aprendizaje de las RPP propuestos por Obando *et al.* (2014), pero analizados desde los principios teórico-filosóficos de la TO. Después de ello reportaremos investigaciones sobre la promoción del pensamiento algebraico, a partir del pensamiento proporcional en el nivel de primaria. Finalmente, mostraremos el asunto de la ética y su importancia en el campo de la Educación Matemática como fuente para el estudio de la creación de subjetividades en el aula.

### A) EL PRIMER MOMENTO: EL PENSAMIENTO PROPORCIONAL VISTO DESDE UNA PERSPECTIVA PIAGETIANA

Este momento en particular está influenciado por los trabajos de Inhelder y Piaget (1958) sobre el desarrollo del pensamiento lógico; en particular el pensamiento proporcional (razonamiento)<sup>1</sup> es un elemento constitutivo de la consolidación de las operaciones formales en general. Esta forma de razonamiento marca el paso del estadio de las operaciones concretas hacia las operaciones formales, alrededor de los doce años de edad del niño. En este primer período de investigaciones (los procesos cognitivos), se habla más del pensamiento que del razonamiento proporcional, dada la influencia de la psicología genética; por ello, dedicaremos mayor extensión en este escrito a este momento, dado nuestro propósito general.

Continuando con la visión de Piaget sobre el pensamiento proporcional, observamos que para el autor la comprensión de la proporción comporta dos aspectos: uno lógico y otro matemático. Esto se explica porque:

*Bajo el aspecto lógico, la proporción es un esquema que establece relaciones entre relaciones (una razón es una relación entre dos variables, y la proporción una relación de equivalencia entre dos razones) e implica el recurso a una lógica de segundo orden. Bajo el aspecto matemático, las compensaciones cuantitativas asumen la forma de esquemas proposicionales de equivalencia (coordinación de los procesos de covariación entre variables y sus respectivas compensaciones) que permiten garantizar que en el proceso de variación se conserve invariante un cociente o un producto (si  $\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}$ , entonces  $xy' = x'y$ ). (Obando *et al.*, 2014, p. 62)*

Para Piaget existen ciertas operaciones mentales que caracterizan cada estadio de desarrollo del pensamiento lógico; en general, algunas de ellas están asociadas al razonamiento proporcional. En el

---

<sup>1</sup> En palabras de Obando *et al.* (2014), en este primer momento no hay mucha distinción entre razonamiento o pensamiento proporcional.

período de las operaciones concretas, el niño usa las compensaciones aditivas en problemas asociados con la multiplicación y la proporcionalidad; por ello, antes del razonamiento proporcional, está lo que Piaget llama preproporcionalidad. Según Piaget, la preproporcionalidad se produce mediante funciones de coordinación, mientras que la proporcionalidad se basa en operaciones que pueden ser reversibles. La principal diferencia entre funciones y operaciones es que las funciones son esencialmente irreversibles (Piaget, 1978, 2017). Ya para el momento de las operaciones formales, el adolescente puede realizar inferencias a partir de cierta información suministrada; por ejemplo, puede deducir un término desconocido a partir de otros tres valores dados en una relación proporcional.

Estos trabajos de Piaget han incidido en los desarrollos investigativos de este primer momento de los procesos cognitivos, como lo explican Polus y Tourniaire (1985) en su estado del arte de la literatura sobre el tema en aquellos años 80. Este documento muestra cuatro apartados interesantes que constituyen la estructura de su revisión documental: i) Las metodologías utilizadas en los estudios de razonamiento proporcional; ii) Las estrategias utilizadas para resolver problemas de proporción, incluidas estrategias erróneas; iii) Los factores que influyen en el desempeño en problemas de proporción, tanto los relacionados con la tarea como los relacionados con los estudiantes; y iv) El impacto de estas consideraciones en los estudios de formación (Polus & Tourniaire, 1985).

Estos autores reportan estudios sobre diversos contextos de tareas usados para promover el razonamiento proporcional, como: las tareas físicas (viga de equilibrio, poleas acopladas y las proyecciones de sombra), los problemas de tasa (consumo de combustible, Sr. Alto y Sr. Corto, zumo de naranja y naranjas, pintores y paredes, patrones, etc.) y los problemas de mezclas (limonada, nueces mixtas, zumo de naranja, arenas de dos colores, etc.)<sup>2</sup>. Claramente, desde esta época se puede ver en la gestión de la enseñanza el uso de contextos inherentes a la física, la química, la estadística, etc., otras ciencias diferentes a las matemáticas; así, el conocimiento sobre las RPP se muestra con hilos conductores hacia otros campos del saber.

En cuanto a las estrategias utilizadas en la solución de estos tipos de tareas, Polus y Tourniaire (1985) reportan en la revisión de la literatura de esta época, dos tipos: comparaciones versus valores perdidos y explicaciones versus respuestas. Es interesante ver acá la necesidad de caracterizar dichas estrategias empleadas por los estudiantes, tanto las exitosas como las que no lo son, dado que estas muestran el despliegue de una manera de razonar frente a las situaciones que requieren el uso de dicha forma de pensamiento. Años después, investigadores como Fernández & Llinares (2012) concluyen que el poder identificar este tipo de situaciones o contextos, es decir, aquellos que se resuelven por este tipo de razonamiento, es a su vez una evidencia de dicho tipo de pensamiento en los estudiantes.

En lo que respecta a los factores que influyen en el desempeño en problemas de proporción, Polus y Tourniaire (1985) indican que se deben hacer dos tipos de distinciones:

---

<sup>2</sup> Traducción propia.

- i) Las variables centradas en las tareas, tanto de tipo estructural de la relación numérica en problemas de proporciones (presencia de razones enteras, orden y complejidad numérica) y las de tipo de contexto, aquellos problemas que varían su estructura, pero mantienen las condiciones contextuales.
- ii) Las variables centradas en el estudiante, aquellas que consideran las características de los educandos, porque juegan un papel en el desempeño de problemas de proporcionalidad; esto denota un foco sobre los procesos psicológicos involucrados en el razonamiento proporcional, al considerar aspectos implicados en el pensamiento del estudiante.

Finalmente, Polus y Tourniaire (1985) señalan la importancia de estas investigaciones en el impacto que puedan tener en los programas de formación de educadores, dado que se hace necesario un cambio de enfoque en el currículo y en las decisiones que deben tomar los docentes para la enseñanza de las RPP. Es claro que el razonamiento proporcional no es un constructo unitario. Por tanto, es difícil concebir una secuencia de enseñanza lineal. Por el contrario, el razonamiento proporcional debe considerarse como una actividad polifacética y presentarse como tal. Pueden ser necesarios distintos métodos para enseñar el razonamiento proporcional, para diferentes estructuras numéricas y contextos.

Para Piaget, el pensamiento formal en general se consolida al pasar de la manipulación concreta a las ideas; además, el lenguaje (de las palabras o los símbolos matemáticos, etc.) se usa como herramienta para el pensamiento, sin necesidad de la percepción, la experiencia o las creencias (Piaget, 2017).

Adicional a lo anterior, en la visión de Piaget sobre el pensamiento proporcional, observamos que para el autor la comprensión de la proporción comporta dos aspectos, uno lógico y otro matemático, como se dijo anteriormente. Sin embargo, en la enseñanza se utiliza más la naturaleza matemática de las razones y proporciones, como un cociente o como una clase de equivalencia de dichos cocientes, respectivamente; olvidando una característica esencial de las razones y proporciones, estas son relaciones de comparación de magnitudes o números (Guacaneme, 2002; Lamon, 1993; Singh, 2000). Así mismo, la comprensión del educador matemático sobre esta dualidad denota la necesidad de fortalecer su conocimiento sobre el tema, porque este aspecto le permitirá entender mejor los asuntos referidos a la enseñanza y el aprendizaje de las RPP.

En este primer momento de la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las RPP surgen los contextos y tareas empleadas para la enseñanza, como una forma de mostrar los vínculos de este saber matemático con otros y así denotar una perspectiva determinada en lo que se refiere al saber matemático puesto en juego en la solución de este tipo de tareas, mediante ciertas estrategias y esquemas.

Sin embargo, desde la TO tenemos una visión distinta en cuanto al saber y al conocimiento, en cuanto al papel de la alteridad en las formas de conocer del sujeto. Dar cuenta del aprendizaje exige, necesariamente, el hacer una distinción entre saber y conocimiento. El saber lo entendemos como potencial y el conocimiento como una actualización de ese saber, de acuerdo a las categorías de

Aristóteles presentes en el materialismo dialéctico. Adicional a ello, de acuerdo con Lévinas (2002), el sujeto debe reconsiderar el papel de los otros en la manera de acceder al conocimiento, debe liberarse de su totalidad e ir hacia la exterioridad, hacia el infinito. En cuanto a estas dos categorías fundamentales de la TO, nos preguntamos ahora: ¿Cuál es el papel del Otro en la transformación de ese saber en conocimiento en el aula de matemáticas? Desde la perspectiva de esta actualización del saber en conocimiento, ¿Cuáles son las limitantes presentes en el aula en cuanto a las formas de producción de saberes asociadas con una visión individual del ser?

Desde las teorías en Educación Matemática basadas en la psicología genética de Piaget, el saber es visto como una construcción. Para estas teorías, “el saber es aquello que resulta de las acciones del individuo. Es una construcción intelectual, personal, subjetiva. El saber es construir algo” (Radford, 2020, p. 29). Esta noción del saber como construcción está presente en la cultura y en el campo educativo desde la incursión de la psicología genética de Piaget, en concordancia con las ideas de Kant sobre la construcción del conocimiento de las matemáticas. A su vez, el racionalismo del siglo XVII ha permitido la consolidación del sujeto como centro del conocimiento, a partir del buen uso de la autonomía y de las libertades sociales que se garantizan por la sociedad. Por ello, el proyecto social de estas teorías es neoliberal, basado en el respeto por la libertad individual; esta condición es estructurada en la posibilidad de elección que tiene el ser (como individuo), además de estar garantizada por el aparato legal, político y económico. En concordancia, el énfasis de trabajo se ha puesto en el sujeto que conoce, “más específicamente, en la comprensión de las maneras idiosincrásicas en las cuales los estudiantes construyen su propio saber” (Radford, 2020, p. 28).

De esta revisión se destaca ver en los diversos trabajos de este tiempo, una visión del razonamiento proporcional como una capacidad global, o una manifestación de una estructura cognitiva general. Así mismo, esta capacidad se muestra como una perspectiva más diferenciada que se centra en describir los procedimientos utilizados en el razonamiento proporcional y cómo se utilizan, influenciada por la tarea y los parámetros constitutivos de los sujetos.

De este primer momento que señalan Obando *et al.* (2014), el de los procesos cognitivos, destacamos desde la perspectiva de investigación de la TO que:

- El saber se presenta como una elaboración mental (construcción), donde el sujeto posee un esquema o secuencia de acciones que le conducirán a producir cierto conocimiento; y el aprendizaje se muestra como la modificación cognitiva o especialización de dichos esquemas, es decir, el sujeto posee ciertas estructuras mentales previas que son modificadas a partir de un proceso de “adaptación”; por tanto, el sujeto construye su propia representación de la realidad.
- Esta adaptación del sujeto al medio que le permite su aprendizaje se logra mediante unos mecanismos universalistas del conocimiento, y estos principios son los mismos en todos los

- diferentes períodos de la humanidad y en todos los seres humanos. Visto así, el saber se presenta como ahistórico.
- Los procesos de razonamiento de los sujetos en una determinada comunidad se muestran separados de los procesos culturales que allí se desarrollan. Es decir, el saber considerado es acultural.

## **B) EL SEGUNDO MOMENTO: EL SABER SOBRE LAS RPP VISTO COMO UNA FORMA DE ESTRUCTURA MATEMÁTICA**

Dado el desarrollo de la Didáctica de las Matemáticas alcanzado en los años 90, se produce un nuevo giro en este campo de las investigaciones sobre el razonamiento proporcional. Como lo señalan Obando *et al.* (2014), además de las variables de orden cognitivo y de contexto mostradas en el anterior momento, entran en juego ahora asuntos de orden epistemológico relativos a la estructura, organización y naturaleza del conocimiento matemático. Así pues, el conocimiento matemático se convierte en una variable fundamental; en particular, los análisis didácticos sobre el aprendizaje y enseñanza de las RPP se centran en asuntos epistemológicos, para abordar las investigaciones de una forma más integral.

Las investigaciones de este momento se centran especialmente en: los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de los números racionales; el razonamiento proporcional en los procesos de aprendizaje en los niños en edad escolar; la aritmética de las cantidades implicadas; la estructura cognitiva y didáctica del pensamiento multiplicativo; y en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas. En este momento específico de las estructuras, en lo que respecta a las investigaciones relacionadas con el razonamiento proporcional, se identifica la importancia o papel central que toma el conocimiento de los números racionales en la consolidación de esta forma de pensamiento. Concretamente, se pasa de comprender el razonamiento proporcional, como la habilidad de aplicar consistentemente los conceptos de razón y proporción en asuntos referidos a la proporcionalidad directa (hallar la cuarta proporcional, por ejemplo), a considerar aspectos cognitivos y metacognitivos implicados en esta forma de pensamiento. Al respecto, Obando *et al.* (2014) distinguen tres procesos implicados: el razonamiento por analogías, la solución de problemas rutinarios de proporcionalidad y la conciencia metacognitiva de la linealidad.

De este momento debemos anotar, dado nuestro enfoque investigativo de la TO, que el saber y el conocimiento no surgen o son el resultado de estructuras de tipo epistémico que olvidan la cultura para su consolidación. Por el contrario, en concordancia con Radford y Silva (2021), estas estructuras son producto de una forma cultural instaurada socialmente, a partir de reflexiones y acciones incorporadas por los sujetos en sus prácticas; a su vez, están mediadas por el lenguaje y la interacción social, por medio de signos y otros instrumentos.

Así pues, la estructura, organización y naturaleza del conocimiento sobre las RPP deben considerar el influjo de la cultura de los individuos en sus respectivos grupos sociales (no puede ser acultural), además

de las transformaciones que puedan tener dichas estructuras para su consolidación a lo largo del currículo de las matemáticas escolares, así como el proceso natural de cada individuo al consolidarlas e incorporarlas a su pensamiento, a partir de signos y artefactos culturales (no puede ser ahistórico).

### C) EL TERCER MOMENTO: LA ACTIVIDAD DE LA CLASE Y EL ASUNTO CULTURAL DESDE LO ANTROPOLÓGICO Y LO SEMIÓTICO

A principios de los años noventa aparecen en el campo de la Didáctica de las Matemáticas dos nuevos enfoques teóricos: la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y la perspectiva de las representaciones semióticas; estas perspectivas de investigación brindan nuevas formas de comprensión sobre el aprendizaje y la enseñanza de las RPP. Desde el marco de la TAD, las razones, las proporciones, la proporcionalidad y los números racionales se aprecian en “términos de Organizaciones Matemáticas (OM) complejas, definidas por tipos de situaciones, prácticas matemáticas, técnicas, tecnologías y teorías, estructuradas alrededor de praxeologías institucionalmente situadas” (Obando *et al.*, 2014, p. 70). Vista así, la didáctica de las RPP como actividad humana o praxeología regularmente constituida en los grupos sociales puede describirse en términos muy precisos.

En este tercer momento de la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las RPP, los mismos autores destacan desde la TAD los trabajos de Bosch (1994) y García (2007) que muestran un conjunto de problemáticas, centradas en un saber de referencia, que puede denotar la causa de los problemas de comprensión de los estudiantes, respecto a la proporcionalidad directa en el nivel de educación básica. Estos trabajos muestran que:

- Muchos estudios propuestos para la enseñanza de la proporcionalidad están centrados en ámbitos puramente numéricos, desligando la riqueza de este concepto de las relaciones funcionales y de otros saberes presentes en el currículo de matemáticas e incluso en otras áreas del conocimiento, como por ejemplo las ciencias naturales.
- Las praxeologías identificadas muestran un constructo adecuado en cuanto a la proporcionalidad directa inversa y compuesta; sin embargo, estas no se relacionan con otras praxeologías más generales. Es decir, se muestran de forma aislada y con un deficiente nivel de algebrización, carentes de los elementos teórico-tecnológicos que permitirían su integración.

No obstante, este tipo de praxeologías se encuentran desligadas del sujeto y produce varios tipos de alienación en el sentido de Marx. Al respecto, Radford (2016) sostiene que dos grandes corrientes en Educación Matemática son alienantes: los modelos de tipo transmisivo y los de tipo progresista. En este sentido, la TAD<sup>3</sup> busca atender las necesidades y potencialidades de los estudiantes, mediante el desarrollo

---

<sup>3</sup> Esta teoría tiene sus orígenes en los trabajos de Brousseau de la década de los 80 y, en palabras de Radford, puede considerarse un enfoque progresista.

de la personalidad y la individualidad de los sujetos; por ello, desde la misma teoría, a este individuo se le denomina sujeto epistémico. Es decir, este individuo, el sujeto kantiano, es el centro de la actividad cognitiva; él es un ser racional con la capacidad para pensar y actuar de manera autónoma, responsable de sus propios actos y posee la libertad de elegir su comportamiento de acuerdo a unos principios morales universales y racionales (Kant, 2003), mientras que el sujeto presente en la TO es histórico-cultural. En palabras de Marx (2015), solo a partir de la praxis el sujeto interpreta la realidad como dinámica y cambiante, en continua transformación. Es en este punto que las formas de producción de saberes en el aula evidencian de manera más notable varios sentidos de la alienación de Marx. Los estudiantes sienten alienación por el producto de su trabajo (conocimiento), porque este no surge de la necesidad de los individuos, ni tampoco brinda satisfacción como forma de expresión humana (Radford, 2016). Por otro lado, la misma actividad del aula de clases resulta alienante para los estudiantes, dado que ellos no han participado en el diseño de la misma, ni en el planteamiento de las metas de aprendizaje.

Desde la perspectiva de las representaciones semióticas, Obando *et al.* (2014) señalan la focalización de los estudios en las interpretaciones semióticas de los objetos, razón y proporción matemática. Durante este periodo, al igual que durante mucho tiempo en el campo, se ha privilegiado el asunto de la cuantificación o cálculo de la razón como un cociente, dejando de lado un aspecto fundamental, el de relación de comparación de dos magnitudes o cantidades (Guacaneme, 2002; Moreno *et al.*, 2017; Singh, 2000).

Para este tercer momento de investigaciones sobre las RPP se da un giro interesante bajo nuestro punto de vista en la Didáctica de las Matemáticas, dado que los enfoques cognitivos anteriores del desarrollo del pensamiento proporcional no consideraban las variables contextuales en su constitución. En concordancia con Obando *et al.* (2014), estas variables asociadas a los contextos se convierten en componentes estructurales del desarrollo dado que, hasta ese entonces, la interacción social, por ejemplo, era tomada como catalizador de la evolución del pensamiento del individuo. Emergen así en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas los enfoques socioculturales a finales de los 90, privilegiando que el conocimiento se consolida en los diversos grupos sociales y es producto de esa misma cultura. Así mismo, esta nueva perspectiva en investigación matemática se consolida desde una mirada filosófica diferente a la usual dentro del campo (de tipo idealista), los procesos mentales de los individuos no surgen de forma universal y genérica (no son aculturales) y son el resultado de ciertas transformaciones y tensiones a lo largo de distintos periodos de tiempo dentro de los diversos grupos sociales (no son ahistóricos).

Finalmente, luego de revisar los tres momentos en la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las RPP propuestos por Obando *et al.* (2014), debemos decir que no encontramos una noción de pensamiento diferente a la desarrollada desde los enfoques cognitivos, basada en los trabajos de Piaget sobre el pensamiento proporcional. Por tal razón, enunciamos que nuestro propósito es indagar sobre el pensamiento proporcional desde la perspectiva de la TO. Desde esta perspectiva, el pensamiento en general se considera como actividad reflexiva y sensible mediada por los signos y, por

tanto, esta se refleja y se materializa en acciones corporales como: gestos, en cierto tipo de lenguaje y en general, por diversos medios semióticos (Vergel, 2015). Estas formas de pensamiento proporcional, que emerjan de las actividades diseñadas en nuestra investigación principal, así como las formas de relación entre los sujetos, se analizarán a partir de la manera cómo evolucionan estos medios semióticos, observando el vínculo entre lo corpóreo, la percepción y el uso de símbolos.

#### D) EL PENSAMIENTO PROPORCIONAL EN PRIMARIA

Dado que el estudio principal se enfoca en el nivel del quinto grado, al vincular el pensamiento proporcional con el pensamiento algebraico, veremos a continuación algunas investigaciones que reportan dicha relación.

Por ejemplo, Butto y Rojano (2010) en su estudio del pensamiento algebraico temprano “introducen las ideas algebraicas en dos versiones: pre simbólica (relacionada con la idea de variación proporcional) y simbólica (en tareas de encontrar y expresar una regla general en el lenguaje Logo)” (p. 59). En la secuencia didáctica que diseñan las autoras, los estudiantes de 10 y 11 años resuelven tareas de variación proporcional y generalizaciones, lo que indica dos rutas de acceso al álgebra: i) la conexión entre el razonamiento proporcional, la variación proporcional, la noción de relación funcional y las cantidades en general (Radford, 1996), y ii) los procesos de generalización, a partir de la percepción, la expresión y la escritura de patrones gráficos, numéricos y figurativos. La primera ruta aprovecha la familiaridad que tienen los estudiantes con el contenido curricular de este nivel sobre el razonamiento proporcional y lo conecta con los otros aspectos referidos, mientras que la segunda ruta promueve la percepción, expresión y escritura de patrones gráficos, numéricos y figurativos, asociados a procesos de generalización (Butto & Rojano, 2010).

Por otro lado, desde una perspectiva psicológica, Rogalski (1985, citado por Kieran & Filloy, 1989) da cuenta de una investigación sobre el aprendizaje del álgebra con estudiantes de 11 a 13 años, en un entorno de aprendizaje mediado por computadoras. En esta investigación, los estudiantes se enfrentan a una tarea que posiblemente implicaría el uso del razonamiento proporcional, sin embargo, ellos no lo hacen y recurren a otras formas de razonamiento, desarrollando escalas e intervalos a partir de lo que observaban en la pantalla. Conviene preguntarse ahora, qué formas de pensamiento usaron los estudiantes en dicho estudio al resolver las tareas asignadas y que implicaciones trae este resultado para nuestra investigación.

Creemos, al igual que Vergel y Rojas (2018), que desde la aritmética también se puede trabajar en la enseñanza con cantidades desconocidas y con procesos de variación. Concretamente desde la proporcionalidad, dada la relación entre magnitudes con unidades múltiples, que puede tener conexiones con la geometría y con otros contextos matemáticos o de situaciones donde se proponga la covariación. Estos mismos autores sostienen que tareas con conteos de unidades múltiples, tipo “de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, etc.”, realizados hacia adelante o hacia atrás, así como las relaciones “uno a uno”

o “uno a varios”, posibilitan la emergencia de variadas estrategias de solución, no sólo para situaciones del tipo aditivo, sino también para aquellas del tipo multiplicativo, además de aportar información sobre las formas de razonar y la comprensión de situaciones que involucran los conceptos de razón y proporción (Vergel & Rojas, 2018).

Trabajos como éstos ejemplifican para nosotros el uso de ciertas herramientas primarias de análisis, y a la vez guardan relación con el pensamiento proporcional de los estudiantes de la educación básica, antes de enfrentarse al estudio del álgebra escolar. Por ello, son un precedente investigativo que debe revisarse a cabalidad, porque modelan de alguna forma un camino de trabajo en cuanto a consideraciones, dificultades y oportunidades, en el estudio de la enseñanza y aprendizaje de las RPP, bajo este enfoque.

Desde otra mirada, el EOS<sup>4</sup>, Burgos y Godino (2019) elaboran en su investigación un análisis de las respuestas de alumnos de quinto curso de primaria, quienes desarrollan por primera vez tareas de proporcionalidad. Los autores estudian los procedimientos usados, las representaciones, los argumentos y las evidencias mostradas por los estudiantes al desplegar el proceso de generalizar. Aunque este enfoque de investigación no es de nuestro interés, sí lo son las reflexiones hechas por los autores al elegir o considerar las tareas para los alumnos, porque se pretende hacer un diseño de actividades en nuestra propuesta.

Finalmente, Lundberg (2022) explora cómo los estudiantes de 12 y 13 años encuentran el razonamiento proporcional mientras trabajan con tareas de patrones geométricos utilizando materiales concretos, como palillos y otros elementos manipulables. En medio del trabajo colaborativo, los estudiantes de esta investigación muestran de manera espontánea sus estrategias de solución al desarrollar tareas de patrones numéricos por primera vez. El estudio de esta autora se basa en analizar las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y aquellos pequeños momentos donde se gesta y desarrolla el aprendizaje de los alumnos (análisis micro genético). Ella concluye en su estudio que la mayoría de los grupos de trabajo en el aula pudo avanzar a lo largo de toda la trayectoria hipotética de aprendizaje, aunque al enfrentar desafíos, los estudiantes retrocedieron a técnicas más simples ya conocidas.

## E) LA ÉTICA EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

El asunto de la ética en el aula de matemáticas no ha sido un aspecto muy explorado en la investigación del campo. Sin embargo, para nuestro propósito, queremos reportar algunos estudios sobre el asunto de la alienación en el aula de matemáticas y sobre la ética comunitaria.

Radford (2016) en su trabajo sobre la alienación en el aula de matemáticas plantea una estructura para el análisis de la alienación, basándose en los principios filosóficos del materialismo dialéctico de la obra de Marx. Éstos son sus componentes:

---

<sup>4</sup> Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.

- a) Un preciso concepto antropológico de sujeto;
- b) Un concepto específico de trabajo; y
- c) Una relación precisa entre los individuos y los objetos que producen mediante la actividad.

Es oportuno señalar que el concepto de trabajo de la obra de Marx se puede extrapolar al contexto educativo, como la actividad que realizan los individuos en el salón de clases de matemáticas; mientras que el producto del trabajo correspondería al saber o conocimiento, dependiendo del tipo de perspectiva en Educación Matemática. Así pues, la actividad matemática y su producto, el saber, constituyen dos elementos para determinar el análisis de la alienación en el aula de clases, bajo la estructura propuesta por Radford (2016).

Por otro lado, Radford y Lasprilla (2020) elaboran un trabajo muy interesante, acerca de la necesidad de investigar sobre el asunto de la ética, al considerar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Generalmente, la investigación del campo ha estado orientada a las formas de producción de saber, no así a la creación de subjetividades. Para este asunto resulta fundamental analizar el tipo de ética imperante en el aula de matemáticas, así como las posibilidades de considerar cierto tipo de relación entre los sujetos que posibilite mejores formas de colaboración humana o al menos no tan alienantes.

Finalmente, Lasprilla *et al.* (2021) plantean ciertos vectores para investigar sobre el asunto de la ética comunitaria: la responsabilidad, el cuidado por el otro y el compromiso por el trabajo conjunto. A su vez, se establecen ciertos descriptores necesarios para poder analizar cada uno de los vectores, lo que se constituye a su vez en una herramienta investigativa para el estudio de esta forma particular de relación de los sujetos, desde el *Yo* hacia los *Otros*.

## DOS FORMAS DE PENSAMIENTO DIFERENTES EN EL CAMPO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En el campo de la Educación Matemática se ha visto una importante influencia de la psicología genética de Piaget, en cuanto a las explicaciones dadas acerca de cómo se produce el desarrollo cognitivo y el aprendizaje (Obando *et al.*, 2014). Así mismo, diversos investigadores coinciden en la importancia del lenguaje para la consolidación del pensamiento. Claramente hay una fuerte relación entre el pensamiento y el lenguaje, dado que la comunicación del individuo juega un papel fundamental en su desarrollo cognitivo; en este aspecto concuerdan Vygotsky y Piaget. Sin embargo, para Piaget el desarrollo del pensamiento se centra más en la acción como vía para llegar a la palabra, mientras que para Vygotsky la palabra misma (como unidad del lenguaje) es una herramienta de desarrollo en la consolidación de las operaciones psicológicas superiores (Wertsch, 2014). Esto claramente muestra para nosotros dos formas de consolidar y ver el pensamiento durante el desarrollo cognitivo del individuo. En particular, queremos explorar el pensamiento proporcional desde una mirada diferente a la piagetiana.

Para Kant (2005), el pensamiento puede ser entendido como la capacidad racional de la mente humana para comprender y organizar la información y la realidad, a partir de las ideas. Por tal razón, el pensamiento es el sustento para el conocimiento y la comprensión, porque permite a los seres humanos reflexionar sobre el mundo y su propia naturaleza. En particular, la perspectiva kantiana del pensamiento matemático es asumida por Piaget cuando retoma el concepto de Kant (2005) sobre las matemáticas: “las matemáticas [...] no derivan su conocimiento de los conceptos sino de la construcción de los mismos” (p. 427). De esta forma, el constructivismo y las demás teorías influenciadas por él centran su noción del conocimiento matemático y de pensamiento desde una perspectiva kantiana. Ahora bien, en la Educación Matemática se distinguen diversos tipos de pensamiento: aritmético, multiplicativo, algebraico, proporcional, probabilístico, etc., cada uno de ellos con sus particularidades específicas asociadas a los objetos matemáticos implicados y las habilidades necesarias para su comprensión, pero con cierta mirada común, la piagetiana.

En lo que respecta al pensamiento proporcional, se considera como la capacidad racional usada para relacionar y comparar dos o más magnitudes o cantidades proporcionalmente; este tipo de pensamiento infiere la comprensión de la relación establecida entre dos razones matemáticas, lo que implica la capacidad de abordar satisfactoriamente problemas referidos a proporciones, fracciones, tasas y porcentajes (Fernández & Llinares, 2012; Lamon, 2012; Perry *et al.*, 2003). A su vez, esta capacidad es puesta a prueba por los estudiantes a lo largo del currículo escolar, como en la promoción del pensamiento algebraico, por ejemplo.

Igualmente, el considerar un sujeto kantiano infiere un enfoque idealista de la relación sujeto-objeto de conocimiento e implica ver una perspectiva individualista del aprendizaje. El sujeto es el centro de la cognición y su entorno es visto como un medio para lograr el conocimiento, mientras que la interacción social repercute en la manera como el individuo conoce (Radford, 2020), pero olvidando a los otros en la forma como ellos deberían aprender a la par de él. Estos principios son universales para todos los individuos, dada la noción de imperativo categórico de Kant.

Por el contrario, Marx en la tesis 6 sobre Feuerbach plantea una nueva visión del ser humano: “La esencia humana es el conjunto de las relaciones sociales”. Esto plantea dos reflexiones: no existen dos sujetos iguales, dado que no hay dos seres con relaciones sociales iguales; y el sujeto se transforma, debido a que sus relaciones sociales van variando a lo largo de su vida. Estas dos consideraciones son asumidas desde la TO, dado el materialismo dialéctico, lo que implica que el estudiante no puede ser genérico; tampoco puede olvidarse del asunto sociocultural en las relaciones de alteridad y su desarrollo cognitivo debe verse de forma histórica.

De ahí que, desde la TO, consideramos un sujeto histórico-cultural, mientras que la actividad, como forma de expresión humana, se considera una categoría central en el análisis investigativo desde nuestra perspectiva dado que, en la praxis, la realidad se interpreta como dinámica y cambiante, en continua transformación, de acuerdo con el materialismo dialéctico de Marx. Recordemos que Marx

invierte el sistema filosófico de Hegel (1966) en su apreciación de la realidad objetiva y de la misma dialéctica. Además, la actividad está mediada por diversos elementos semióticos, complementarios al lenguaje verbal, en una consideración multimodal de la cognición humana, más amplia que la perspectiva influenciada por Piaget (Arzarello, 2006).

Por otra parte, desde la TO, el pensamiento se conceptualiza como actividad reflexiva y sensible mediada por los signos, la cual se refleja y se materializa en acciones corporales, como: gestos, en cierto tipo de lenguaje y en general, por diversos medios semióticos (Radford, 2006, 2014). En consecuencia, nuestro estudio principal enunciará las características del pensamiento proporcional desde esta mirada, más amplia que la usual, así como las relaciones de estas con las formas de interacción social.

## CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

Luego de la revisión minuciosa de los diferentes antecedentes investigativos, se pueden establecer ciertas consideraciones que surgen de este análisis, objetando claramente que los principios epistemológicos y filosóficos de la TO orientan dichas ideas.

En primer lugar, de acuerdo con los momentos que clasifican las diversas investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las RPP planteados por Obando *et al.* (2014), podemos reportar que la noción más usual en la literatura sobre el tema es la de razonamiento y no la de pensamiento proporcional. Tanto así que, al hablar del momento de los procesos cognitivos, no hay mucha distinción entre las dos nociones conceptuales. No obstante, hemos resaltado la importancia de hacer distinción entre dos formas diferentes de pensamiento proporcional, la piagetiana y la neovigotskiana. La primera perspectiva es imperante dentro del campo de la Educación Matemática, de corte filosófico idealista; mientras que la segunda tiene un enfoque más amplio de la cognición humana y es de tipo filosófico materialista.

En segundo lugar, esta influencia racionalista de Kant y a la vez idealista sobre el trabajo de Piaget, en relación al aprendizaje de las matemáticas, ha suscitado un foco sobre el individuo mismo que, a partir de la razón y las ideas, considera el saber como una construcción mental. Este factor ha incidido a la vez en la manera cómo se investigan los fenómenos de la enseñanza y aprendizaje de las RPP los últimos 60 años, mostrando el saber como una elaboración mental (construcción), y el pensamiento proporcional se configura a partir de esquemas o secuencias de acciones dispuestas a producir cierto conocimiento; por tanto, el aprendizaje sobre este tópico tan relevante de las matemáticas se muestra como una modificación cognitiva o especialización de estos esquemas (adaptación).

En tercer lugar, se observan, a partir de la psicología genética de Piaget y los enfoques en Educación Matemática de tipo constructivista, ciertos principios universalistas sobre el conocimiento, sin importar el momento histórico de los grupos humanos, ni tampoco la influencia de la dimensión sociocultural en la génesis del desarrollo del pensamiento proporcional de los niños. De esta forma, los procesos de razonamiento de los sujetos de un determinado grupo humano se muestran de forma ahistórica y acultural.

En cuarto lugar, el saber y el conocimiento sobre las RPP no surgen o son el resultado de estructuras de tipo epistémico que olvidan la cultura de los sujetos para su consolidación, dado que el conocimiento matemático mismo ha tomado un considerado período de tiempo para su refinamiento y síntesis; además, ha surgido como producto de una forma cultural instaurada socialmente, mediante reflexiones y acciones que los sujetos han desarrollado a partir de sus prácticas. Esto ha sido posible a partir del lenguaje y la misma interacción social de los individuos que, mediante ciertos medios semióticos, han consolidado dicho conocimiento sobre las RPP. Igualmente, la estructura, organización y naturaleza del conocimiento sobre las RPP no puede mostrarse de forma acultural y ahistórica al momento de la enseñanza.

En quinto lugar, desde la TO, mediante la práctica matemática (actividad), el sujeto interpreta la realidad como dinámica, en constante cambio y transformación. Así mismo, a partir de ella y del papel de la alteridad en su constitución, es que el saber que circula por la clase se puede transformar en conocimiento. Esta situación particular considerada desde la TO (el sujeto histórico-cultural y la labor conjunta) permite el coposicionamiento de los estudiantes y el profesor, así como la creación de subjetividades. Por tal razón, al no existir en el campo de la Educación Matemática un estudio similar, se hace necesario investigar sobre la epistemología misma del conocimiento de las RPP y su vínculo con una interacción social en el aula que no sea alienante.

Finalmente, la labor conjunta dentro de la TO permite la consideración de ciertas formas particulares de interacción social entre los sujetos, basadas en la responsabilidad, el cuidado por el otro y el compromiso por el trabajo conjunto. Esto, sin lugar a dudas, es posible a partir de cierto tipo de ética comunitaria que configura la misma actividad en la clase de matemáticas. Pero nos preguntamos ahora ¿Cuáles son las relaciones que vinculan la emergencia del pensamiento proporcional y las formas de interacción social en un aula mediada por una ética de orientación comunitaria? ¿Existen ciertas consideraciones en la gestión docente desde las configuraciones de las tareas que permiten mejores formas de colaboración humana? ¿Cuáles son las diferencias y/o similitudes entre las dos formas de pensamiento proporcional (la piagetiana y la neovigotskiana) desde un punto de vista epistemológico?

## ACLARATORIAS

El autor no tiene conflicto de interés que declarar. El artículo ha sido financiado con recursos propios del autor.

## REFERENCIAS

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME*, 9(Extraordinario 1), 267-299.

- Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva de la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad* [tesis de doctorado no publicada, Univesitat Autònoma de Barcelona].
- Burgos, M., & Godino, J. D. (2019). Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. *Educación Matemática*, 31(3), 117-150.
- Butto, C., & Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno Logo. *Educación Matemática*, 22(3), 55-86.
- Fernández, C., & Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(1), 129-141.  
<https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596>
- García, F. J. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio en las relaciones funcionales en la educación secundaria. En M. Camacho, P. Flores, & María Pilar Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 71-92). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
- Gobara, S. T., & Radford, L. (2020). *Teoria da objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática*. Editora Livraria da Física.
- Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA*, 7(1), 3-42.
- Hegel. (1966). *Fenomenología del espíritu* (W. Roces, trad.). Fondo de cultura económica.
- Inhelder, B., & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence: An essay on the construction of formal operational structures* (A. Parsons, & S. Milgram, trad.). Basic Books.  
<https://doi.org/10.1037/10034-000>
- Kant, I. (2003). *Crítica de la razón práctica* (J. Rovira, trad.). La página S.A.
- Kant, I. (2005). *Crítica de la razón pura* (P. Ribas, trad.). Taurus.
- Kaput, J. J., & Blanton, M. L. (2000). *Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics: Making it implementable on a massive scale*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science. (ERIC Document Reproduction Service No. ED441663).
- Kieran, C., & Filloy, Y. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 7(3), 229-240. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5038>

- Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 41-61. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.24.1.0041>
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3.<sup>a</sup> ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203803165>
- Lasprilla, A., Radford, L., & León, O. (2021). La labor conjunta en actividades de enseñanza-aprendizaje a partir del estudio de los vectores de la ética comunitaria. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC*, 16(39), 228-245. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n39.p228-245.id498>
- Lévinas, E. (2002). *Totalidad e infinito: Ensayo sobre la exterioridad* (6.<sup>a</sup> ed.). Ediciones Sígueme.
- Lundberg, A. L. V. (2022). Encountering proportional reasoning during a single algebra lesson: A microgenetic analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3), em0693. <https://doi.org/10.29333/iejme/11571>
- Marx, K. (2015). *Manuscritos económico-filosóficos de 1844* (M. Vedda, F. Aren, & S. Rotemberg, trad.). Ediciones Colihue SRL.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. MEN. [https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021\\_recurso\\_1.pdf](https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf)
- Miranda, I., & Vergel, R. (2020). Editorial. *Revista Colombiana de Matemática Educativa - RECME*, 5(2), 1-13.
- Moreno, R., Mayorga, R., & Guacaneme, E. (2017, 31 de octubre). *Perspectivas teóricas de la razón, la proporción y la proporcionalidad como relaciones de comparación* [conferencia]. II Congreso de Educación Matemática de América Central y del Caribe, Cali, Colombia.
- Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: Un estado del arte. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME*, 17(1), 59-81.
- Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, L., & Fernández, F. (2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: Un hueso duro de roer*. Editorial Una Empresa Docente.
- Piaget, J. (1978). *Psicología del niño* (7.<sup>a</sup> ed.). Ediciones Morata, s. l.

- Piaget, J. (2017). *Seis estudios de psicología*. Editorial SKLA.
- Polus, S., & Tourniaire, F. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 181-204. <https://doi.org/10.1007/BF02400937>
- Radford, L. (1996). Some reflections about the teaching of algebra through generalization. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for research and teaching*, (pp. 107-111). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3\\_7](https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_7)
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME*, 9(Extraordinario 1), 103-129.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>
- Radford, L. (2016). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, 79, 258-266. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2016.04.001>
- Radford, L. (2017a). Aprendizaje desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore, & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 113-134). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Radford, L. (2017b). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore, & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 95-112). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Radford, L. (2018). Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. *PNA*, 12(2), 61-79. <https://doi.org/10.30827/pna.v12i2.6965>
- Radford, L. (2020). El aprendizaje visto como saber y devenir: Una mirada desde la teoría de la objetivación. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC*, 15(36), 27-42. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n16.p27-42.id306>
- Radford, L., & Lasprilla Herrera, A. (2020). De por qué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *La Matematica e La Sua Didattica*, 28(1), 107-128.
- Radford, L., & Silva, M. (2021). *Ética: Entre educación y filosofía*. Universidad de los Andes.
- Rogalski, J. (1985). Acquisition of number-space relationships: Using educational and research programs. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 71-76). State University of Utrecht.

- Singh, P. (2000). Understanding the concepts of proportion and ratio constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 271-292.  
<https://doi.org/10.1023/A:1011976904850>
- Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, 9(3), 193-215. <https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220>
- Vergel, R., & Rojas, P. J. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: Aportes para el trabajo en el aula*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Wertsch, J. (2014). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Ediciones Paidós.

**Cómo citar este artículo:**

- Moreno, R. (2023). El pensamiento proporcional y la formación de subjetividades en el aula: Una aproximación al estado del arte. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, 3(3), e202313. <https://doi.org/10.54541/reviem.v3i3.68>



Copyright © 2023. Rafael Moreno León. Esta obra está protegida por una licencia [Creative Commons 4.0. International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Usted es libre para Compartir —copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato— y Adaptar el documento —remezclar, transformar y crear a partir del material— para cualquier propósito, incluso para fines comerciales, siempre que cumpla la condición de:

Atribución: Usted debe dar crédito a la obra original de manera adecuada, proporcionar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que tiene el apoyo del licenciante o lo recibe por el uso que hace de la obra.

[\*Resumen de licencia - Texto completo de la licencia\*](#)