

UNA TRAYECTORIA DE INVESTIGACIÓN SOBRE EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: DEL GRUPO SIDM A LA RED IBEROAMERICANA MTSK

A TRAJECTORY OF RESEARCH ON MATHEMATICS TEACHERS' KNOWLEDGE:
FROM THE SIDM GROUP TO THE MTSK IBERO-AMERICAN NETWORK

UMA TRAJETÓRIA DE PESQUISA SOBRE O CONHECIMENTO DO PROFESSOR DE
MATEMÁTICA: DO GRUPO SIDM À REDE IBERO-AMERICANA MTSK

José Carrillo Yañez¹ 

Nuria Climent Rodríguez¹ 

Miguel Montes Navarro¹ 

María Cinta Muñoz-Catalán² 

¹ Universidad de Huelva, Huelva, España

² Universidad de Sevilla, Sevilla, España

Recibido: 16/01/2022 – Aceptado: 11/04/2022 – Publicado: 28/05/2022

Remita cualquier duda sobre esta obra a: Nuria Climent Rodríguez

Correo electrónico: climent@uhu.es

RESUMEN

En este artículo se describe la trayectoria investigativa del grupo *Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática* (SIDM), con sede en la Universidad de Huelva (España). En particular, se describen los aspectos relevantes del proceso de investigación que comienza en los años 90 con foco en las concepciones del profesor de matemáticas y que culmina con el proceso de creación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, MTSK) y la actual configuración de la Red Iberoamericana MTSK. La creación de este modelo, hito clave de dicha trayectoria, es fruto del trabajo colaborativo de investigadores de diferentes países, suponiendo la continuación de nuestra investigación sobre el profesor de matemáticas, en aras de contribuir a la mejora de su formación. De este modo, pretendemos desentrañar cómo los intereses de investigación iniciales fueron derivando y complementándose con otros nuevos, y cómo la red de colaboración con otros investigadores se fue ampliando hasta la conformación de la Red Iberoamericana MTSK.

Palabras clave: Conocimiento del Profesor; Desarrollo Profesional; Concepciones del Profesor; Matemáticas; Trayectoria de Investigación.

ABSTRACT

This article describes the research trajectory of the group *Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática* (SIDM), from the University of Huelva (Spain). In particular, it describes the relevant aspects of the research process starting from its origins in the 90's, focused on the beliefs of the mathematics teacher and culminating with the process of creation of the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model and the current configuration of the Iberoamerican MTSK Network. In the SIDM group, we have developed a model for the analysis of the MTSK. The creation of this model, a key milestone in this trajectory, is the result of the collaborative work of researchers from different countries, and is the continuation of our research on the mathematics teacher, in order to contribute to the improvement of their training. In this way, we intend to unravel how the initial research interests were derived and complemented by new ones, and how the network of collaboration with other researchers was expanded until the formation of the Iberoamerican Network MTSK.

Keywords: Teachers Knowledge; Professional development; Teachers beliefs; Mathematics; Research trajectory.

RESUMO

Neste artigo descreve-se a trajetória de pesquisa do grupo *Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática* (SIDM), com sede na *Universidad de Huelva* (Espanha). Em particular, descrevem-se os aspectos relevantes do processo de pesquisa que começa nos anos 90 com foco nas concepções do professor de matemática e que finaliza com o processo de criação do conhecimento especializado do professor de matemática (*Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*, MTSK) e a configuração atual da Rede Ibero-Americana MTSK. A criação deste modelo, fato chave da trajetória supracitada, é fruto do trabalho colaborativo de pesquisadores de diferentes países, supondo a continuação de nossa pesquisa sobre o professor de matemática, em prol de contribuir para a melhora de sua formação. Desse modo, pretendemos desvendar como os interesses de pesquisa iniciais foram emergindo e complementando-se com outros novos, e como a rede de colaboração com outros pesquisadores foi ampliando-se até a conformação da Rede Ibero-Americana MTSK.

Palavras-chave: Conhecimento do Professor; Desenvolvimento Profissional; Concepções do Professor; Matemática; Trajetória de Pesquisa.

INTRODUCCIÓN

Durante el desarrollo del *8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 8), hubo un grupo de trabajo (Working Group 17) titulado *From a Study of Teaching Practices to Issues in Teacher Education*. En este grupo, el equipo de investigación de la Universidad de Huelva, conocido como SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática), presentó 5 comunicaciones (Carreño *et al.*, 2013; Carreño, Rojas, *et al.*, 2013; Carrillo, Contreras *et al.*, 2013; Flores-Medrano *et al.*, 2013; Montes *et al.*, 2013). Aunque este hecho, en sí mismo, no es destacable en un congreso como CERME, sí mostraba el trabajo intenso de un equipo en torno a un mismo objetivo: el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, del que se hacía difusión por primera vez en el ámbito internacional. Las aportaciones a este congreso mostraban la construcción teórica y la aplicación analítica del *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK), que reflejaba años de trabajo en el ámbito del conocimiento del profesor de matemáticas.

En la primera comunicación citada, centramos nuestra atención en la necesidad de discutir la naturaleza del *conocimiento del horizonte del contenido* (HCK), debido a los problemas analíticos de delimitación entre este subdominio y el *conocimiento especializado del contenido* (SCK), ambos del modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT – Ball *et al.*, 2008) con el que veníamos trabajando.

En la segunda, mostramos evidencias que nos llevaron a sugerir la incorporación, integración e interconexión de aspectos del conocimiento aparentemente sin relación en el modelo MKT. Ya en este trabajo indicábamos nuestros esfuerzos encaminados a un modelo que resolviera las dificultades analíticas que habíamos encontrado y citábamos el modelo que estábamos construyendo (*Mathematics Teachers' Specialised Knowledge* –MTSK), que se presentaba en la tercera comunicación.

En la cuarta, justificábamos la caracterización como especializado de todo el conocimiento del profesor y en la quinta y última, definíamos y analizábamos tres subdominios del modelo MTSK: *Conocimiento de los Temas* (KoT), *Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas* (KSM) y *Conocimiento de la Práctica Matemática* (KPM). Discutíamos las características definitorias de estos subdominios, contrastándolas con el modelo MKT y utilizando ejemplos de nuestra propia investigación. Dos publicaciones posteriores (Carrillo *et al.*, 2017; Carrillo *et al.*, 2018) revisaban algunas categorías del modelo, a la luz de investigaciones que se realizaron inmediatamente después y ofrecían una versión consolidada del mismo. La investigación no siempre reporta los vericuetos que quedan atrás cuando se informa de un resultado que es producto de trabajo de varios años.

Desde nuestra perspectiva, visualizar los procesos ayuda a una mejor comprensión de los resultados finales. En nuestro caso, la andadura que nos llevó hasta el modelo MTSK comienza cuando dos matemáticos que trabajaban en la formación inicial y permanente del profesorado, se propusieron indagar acerca de las razones de la escasa eficacia de los cursos convencionales que impartían como parte de la formación continua de los profesores de Primaria y Secundaria en Andalucía (una región al sur de España). El equipo fue creciendo a medida que surgían nuevos interrogantes y ahora afronta uno de sus mayores retos: coordinar y propulsar la investigación con el modelo MTSK y su aplicación a la formación de profesores en un conjunto de más de 100 investigadores de 11 países, aglutinados en torno a la *Red Iberoamericana de Investigación sobre el conocimiento especializado del profesorado de matemáticas*.

Este artículo trata de mostrar la trayectoria, desde finales de los 90, hasta la actualidad, de este equipo de investigación. Con este ejercicio, pretendemos contribuir a la comprensión de la investigación con el modelo MTSK y compartir nuestra reflexión sobre la investigación sobre el profesor de matemáticas.

NUESTRO PRIMER ACERCAMIENTO AL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

En la década de los 90 impartimos numerosos cursos en programas de actualización científico-didáctica que los Centros de Profesores (dependientes de los departamentos de educación del gobierno de Andalucía) organizaban para los profesores en ejercicio. Nuestro interés por incorporar al aula de Primaria y Secundaria los beneficios que la investigación en Educación Matemática atribuía a la

resolución de problemas, nos llevó a orientar esos cursos en forma de talleres en los que, mediante la resolución de problemas, contribuíamos a reflexionar acerca de este recurso como medio de construcción de conocimiento matemático y de aprendizaje de estrategias de resolución, desde una visión de la matemática escolar como producto de la investigación y la indagación (Carrillo, 1998; Contreras & Carrillo, 1997).

Nuestra valoración de aquella experiencia es que los cursos promovían una forma distinta de ver las matemáticas escolares, con lo cual conseguían la empatía de los asistentes y un aparente compromiso de cambio; pero también percibíamos que toda la experiencia previa del profesorado parecía actuar de filtro e incluso de obstáculo para que este se hiciera efectivo.

La búsqueda de respuestas a las razones de esas reticencias nos llevó a nuestras investigaciones acerca de las concepciones (entendidas en la línea de Thompson, 1992), en concreto concepciones sobre la matemática, sobre sus procesos de enseñanza y aprendizaje, y sobre el papel de la resolución de problemas en el aula (siguiendo los trabajos de autores como Ernest, 1989a, 1991; Kuhs & Ball, 1986; Pajares, 1992; Ponte, 1994; Porlán, 1989, 1992; y Thompson, 1991).

La investigación apuntaba que, derivado de la experiencia personal y de la propia formación inicial, los profesores generaban unas creencias acerca de la matemática y de sus procesos de enseñanza y aprendizaje que podrían tamizar la nueva información recibida en procesos de formación continua, adaptándola e interpretándola de forma no necesariamente compatible con la intención que la originaba.

Para comprender esas creencias, en un primer momento abordamos el conocimiento de los profesores a través del análisis de sus protocolos al resolver problemas y de entrevistas semiestructuradas acerca de sus concepciones sobre la matemática y sus procesos de enseñanza y aprendizaje, buscando relaciones entre sus capacidades como resolutores y sus concepciones y, dentro de estas, entre sus concepciones sobre la matemática y sobre sus procesos de enseñanza y aprendizaje.

Los informantes nos permitieron ver relaciones entre la concepción instrumentalista de la matemática y ciertas dificultades en relación con el control en el proceso de resolución de problemas, acompañado también de comprensión y planificación deficientes y de tendencias tradicionales/tecnológicas sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Profesores con mejores niveles como resolutores mostraron concepciones platónicas y de resolución de problemas y tendencias didácticas tecnológicas/investigativas. Podría decirse que para ver la matemática como una actividad de resolución de problemas y ver la resolución de problemas como medio para aprenderla, un profesor tendría que mostrar buenas capacidades resolutorias.

Una segunda fase de nuestra investigación utilizó la observación de aula para comprobar que el papel que los profesores conceden a la resolución de problemas en sus clases era un indicador de sus concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, siendo más proclives a utilizar la resolución de problemas los profesores de tendencia didáctica investigativa (Carrillo & Contreras 1994, 1995).

Comprendíamos así que cualquier programa formativo debía partir de esas concepciones que la literatura consideraba muy estables y muchas veces no conscientes por parte del profesor (con autores que diferenciaban concepciones en la acción y concepciones expuestas, como Ernest, 1989b). No se trataba tanto de intentar cambiarlas, como de comprenderlas y hacerlas explícitas y conscientes en el pensamiento del profesor como medio de buscar coherencia entre lo que el profesor pensaba y lo que deseaba hacer como docente.

Esta nueva perspectiva nos llevó a cambiar de un modelo de formación permanente, basado en cursos y talleres, a un modelo basado en la investigación colaborativa (Feldman, 1993). Comenzamos a ver la formación del profesor como un proceso en el que la separación entre la formación inicial y la permanente es solo de carácter administrativo y a entender el conocimiento profesional de los profesores considerando sus concepciones, actitudes y capacidades sobre la matemática y su enseñanza. Esto nos llevó hacia un modelo de desarrollo profesional en el que se enfatizaba el papel de la reflexión (entendida como una consideración cuidadosa de las creencias y conocimiento propios, en la línea de Dewey, 1933/2003; y fuertemente influenciado por los trabajos de Schön, 1983, 1987, sobre el profesional reflexivo), para la cual el rol de los investigadores fue esencial. Se trataba de una reflexión que propiciaba la movilización de las propias ideas de los profesores sobre la materia, su enseñanza y aprendizaje, y que contemplaba sus características y necesidades profesionales y, fundamentalmente, la propia conciencia y decisión sobre su proceso de desarrollo profesional (Climent & Carrillo, 2003).

Adoptamos así una visión del profesor, compartida con otros investigadores en Educación Matemática, como un aprendiz adulto cuyo desarrollo es el resultado de cambios en las estructuras cognitivas (o cambios en sus modelos de pensamiento) (Brown & Borko, 1992) a través de las cuales los profesores se relacionan con su entorno, y orientamos nuestro interés hacia el proceso de generación de conocimiento. Esto nos llevó a proponer un modelo de desarrollo profesional que reflejaba los resultados de nuestras investigaciones.

En este modelo, el profesor “se mueve” en una especie de hélice de desarrollo profesional en un contexto formativo donde el papel del formador es proporcionarle entornos de aprendizaje para progresar en esa hélice. En el contenido de esa hélice, siguiendo a Shulman (1986, 1987), incluimos el conocimiento de la materia (como objeto de enseñanza y aprendizaje), el conocimiento didáctico del contenido, el conocimiento del currículo matemático, el conocimiento psicopedagógico general y el conocimiento del contexto escolar; y, por supuesto, incluimos las concepciones, actitudes y capacidades.

La hélice dispone de una orientación definida por las fases de interiorización, condensación y cosificación, que describen cómo se van generando y consolidando elementos del conocimiento del profesor, posibilitados por la reflexión (de ahí que habláramos de la reflexión como generatriz del proceso de desarrollo); la reflexión se constituye a su vez en contenido del desarrollo, pues el profesor mejora su capacidad reflexiva (Carrillo *et al.*, 2007).

Estos fueron los primeros pasos para construir un modelo de desarrollo profesional, que surgió del Proyecto de Investigación Colaborativa (PIC), del que hablaremos en la siguiente sección, y también para construir un modelo analítico del conocimiento del profesor, sobre la base de tres elementos: las concepciones de los profesores, el conocimiento de la matemática (como objeto de enseñanza y aprendizaje) y el conocimiento didáctico del contenido matemático. Un modelo que nace de nuestra necesidad de identificar los elementos del conocimiento del profesor que observamos en la gestión de las situaciones de aulas de los profesores con los que realizamos la investigación colaborativa.

Para abordar estrategias formativas es preciso analizar la naturaleza y las características que conforman el conocimiento que el profesor necesita para desarrollar su labor docente. El conocimiento que pretendemos identificar tiene atributos particulares vinculados a la matemática, pero su naturaleza va más allá del propio contenido matemático; es un conocimiento para la enseñanza de las matemáticas y emerge de las acciones del profesor en el aula. Por ello, trabajar con profesores nos brinda la oportunidad de identificar y analizar buenas prácticas utilizando modelos analíticos que nos permitan desgranar y comprender la naturaleza, la estructura y la organización del conocimiento que esas prácticas encierra.

BUSCANDO ALTERNATIVAS A LA FORMACIÓN CONTINUA DE LOS PROFESORES: EL PIC

El Proyecto de Investigación Colaborativa (PIC) se constituyó en 1999 por iniciativa de un grupo de profesores que buscaban mejorar su práctica en relación con la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Desde el principio se consensó profundizar en su comprensión de un enfoque de resolución de problemas para la enseñanza de las matemáticas.

El PIC inició su andadura constituido por dos formadores e investigadores y dos profesores de primaria con más de 15 años de experiencia. En sus más de 20 años de camino, se fueron sumando a este grupo maestros y profesores de diversos niveles educativos, desde Educación Infantil hasta la Universidad, incluyendo una inspectora de Educación, maestros recién egresados y en formación, y alumnos de posgrado. Los cuatro miembros iniciales han seguido siendo miembros activos del mismo. Actualmente, el PIC está conformado por cuatro profesoras de Primaria con experiencia (más de 25 años), una profesora de Educación Infantil (más de 10 años de experiencia), dos profesores de Secundaria (menos de 5 y más 20 años de experiencia, respectivamente), una inspectora de Educación experimentada y dos investigadores noveles, además de dos investigadores expertos en Educación Matemática. Los profesores de Infantil, Primaria y Secundaria muestran una trayectoria profesional de participación en la formación continua en Educación Matemática. Los investigadores experimentados tienen una larga trayectoria de trabajo con profesores no universitarios, habiendo participado en numerosas actividades de formación inicial y continua de profesores.

El trabajo en el PIC siempre se ha desarrollado sobre la convicción de que cada miembro tiene sus propios intereses y expectativas que se vinculan a unos objetivos comunes consensuados: i) el desarrollo profesional de cada miembro dentro de su ámbito (como profesores y como investigador-formador), y ii) la investigación, tanto en la práctica del aula como en la formación de profesores. Además, este trabajo ha discurrido sobre una comprensión compartida de que el desarrollo profesional no vendría dado por la aceptación de normas o recetas de actuación externas (provenientes de los investigadores), sino por la reflexión continua sobre la práctica y sobre actividades profesionales comunes. Por tanto, el PIC se organiza bajo una lógica de desarrollo profesional más que de formación, con la cual los integrantes adquieren herramientas que desarrollan y aplican haciendo uso del juicio como profesionales reflexivos.

Desde su comienzo, el PIC ha mantenido una reunión quincenal, que sigue un esquema de trabajo acordado al inicio de cada curso académico, y que abarca una tarde completa. En la semana intermedia se efectúan tareas acordadas (como lecturas o reflexiones individuales). Los integrantes comparten la resolución de problemas como enfoque metodológico clave en torno al cual se articulan los procesos de enseñanza y aprendizaje. Desde la perspectiva del desarrollo profesional, dichos integrantes adoptan un enfoque particular basado en la lectura y discusión de artículos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; planificación, observación y reflexión individual y grupal sobre la práctica de los profesores implicados; intercambio de ideas de enseñanza y evaluación de enfoques teóricos respecto del aprendizaje de las matemáticas. Esta dinámica ha proporcionado, al mismo tiempo, un objeto de estudio fructífero para los investigadores (e. g. Carrillo & Climent, 2007, 2009).

Al igual que otros trabajos inspirados en el enfoque Lesson Study (Fernandez & Yoshida, 2012), el PIC le da un papel central al análisis de las grabaciones de aula, pero se aparta de él en el al no abogar por implementar una lección modificada como resultado. Todos los miembros del PIC disfrutaban de un estatus idéntico en todas las actividades, aunque los diversos antecedentes teóricos y empíricos de los investigadores garantizan una variedad de contribuciones en las discusiones, más allá de una simple división entre profesor e investigador. Si bien los investigadores proporcionan instrumentos teóricos para analizar las grabaciones y ofrecen su apoyo para la planificación, el grupo debate sobre ellos y los adapta. Los profesores aportan conocimiento de la práctica referido a sus alumnos, sus aulas y sus escuelas, vinculándose la teoría con la práctica real. Se trata, por tanto, de una empresa colaborativa que adopta el principio de “trabajar con, no trabajar sobre” (Lieberman, 1986) y que combina el desarrollo profesional con la construcción de conocimiento a través de la investigación.

En los comienzos del PIC, la práctica de una de las profesoras implicadas pareció sufrir una transformación significativa como fruto de su participación en este proyecto. Es así como esta profesora, a la que denominaremos Inés, cuyas concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática era de corte investigativo, inició un proceso de mejora de su práctica, de manera que sus decisiones y gestión de clase se acomodara tales concepciones. En este proceso, Inés fue tomando conciencia, y los

formadores-investigadores con ella, de la necesidad de ampliar su conocimiento profesional específico sobre la enseñanza de la matemática.

Se daba el caso de que la profesora modificaba su práctica en el aula de matemáticas hacia una metodología que ella consideraba de resolución de problemas, encontrándose con situaciones que no sabía resolver o anticipar por carencias en su conocimiento matemático y didáctico del contenido matemático (Climent & Carrillo, 2003). Estas carencias se constituían en un freno en su desarrollo profesional. Pero en estos momentos, los profesores implicados en el PIC no estaban dispuestos a abordar su conocimiento en el seno del proyecto, confiando en que necesitaban un cambio más metodológico y de capacidad de reflexión que de aprendizaje de contenidos.

En Carrillo y Climent (2011) expusimos hasta qué punto la discusión de fragmentos que ejemplifican buenas prácticas de enseñanza mejoraba la comprensión de la práctica por parte de los profesores. Las muestras se extraían de clases de las maestras participantes. Los miembros del PIC visitaban los salones de clases en una actitud no participativa. El análisis conjunto de las clases impartidas comenzaba con proximidad temporal a su impartición, dividiendo las clases en episodios (segmentos ininterrumpidos organizados alrededor de una intención pedagógica o gerencial identificable). A continuación, se analizaba cada episodio con los instrumentos que el propio grupo había elaborado (e. g. Climent & Carrillo, 2007; Carrillo *et al.*, 2008), analizando el foco matemático, el contexto de las actividades matemáticas, las estrategias de enseñanza implementadas y la gestión de la participación de los alumnos por parte del profesor.

Seguidamente, se identificaban aquellos episodios de cada sesión que, según el grupo, representaban una buena práctica y se consensuaba su caracterización. De este modo, el propósito que impulsa la participación de los profesores es la caracterización de buenas prácticas, con la intención de conseguir una mejor comprensión de la práctica.

Nuestro estudio (Carrillo & Climent, 2011) evidenció este desarrollo, en relación con una conciencia metacognitiva del fundamento que hay detrás de las acciones y decisiones de los profesores. Las diversas dimensiones implicadas en la mejora de la comprensión de la práctica están interrelacionadas. En particular, tener a su disposición las herramientas y el discurso teórico para analizar muestras de enseñanza, permite al docente explorar con mayor profundidad tanto situaciones específicas como la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general.

Como hemos mostrado en diversos resultados (Carrillo & Climent, 2009, 2011), cuando los profesores consideran el enfoque de una lección o los elementos específicos que la caracterizan, dan una consideración detallada al contexto, así como a los objetivos subyacentes a la situación. En este sentido, la definición de buenas prácticas a través de la referencia a variables específicas tiene mucho que ofrecer; es una fuerza impulsora para aprender de la práctica.

En el transcurso de las discusiones, los profesores adquieren una mayor sensibilidad a las cuestiones de la estructura matemática y lo que constituye el *carácter real* en el contexto de las actividades

matemáticas. También desarrollan estrategias para fomentar un enfoque más reflexivo por parte de los estudiantes y una mayor responsabilidad por su propio aprendizaje. Su discusión suele ir más allá de la mera descripción de una grabación de vídeo, y podemos afirmar que los docentes del PIC toman conciencia de aspectos relevantes para la enseñanza de las matemáticas y los reconceptualizan, transformándolos en *objetos* de discusión, de forma que se realiza un ciclo que combina la práctica y la teoría y tiene como objetivo generar teoría (ciclo teórico) o influir en la práctica (ciclo práctico).

Para que esto sea posible, la carga teórica se elige de forma que sea accesible para el profesor, sea útil para analizar situaciones específicas y, al mismo tiempo, suficientemente profunda para ayudar a comprender la complejidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Aunque no hemos pretendido generalizar nuestra experiencia a programas de desarrollo profesional a gran escala para profesores de matemáticas, creemos que nuestros trabajos aportan un medio para promover y analizar la experiencia de los profesores que puede aplicarse a otros grupos de profesores, tanto como forma potencial de trabajar con profesores en un entorno colaborativo, centrándose en analizar y caracterizar las buenas prácticas mediante la implementación de herramientas teóricas, como en la consideración de las dimensiones utilizadas para caracterizar las buenas prácticas como una herramienta poderosa para promover la reflexión de los profesores sobre la práctica.

La potencia del análisis de prácticas de aula en el seno del PIC y la caracterización de buenas prácticas a partir de este, nos llevaron a usar el análisis de vídeos de sesiones reales de matemáticas en la formación inicial de profesores (e. g. Carrillo & Climent, 2009; Climent *et al.*, 2013, 2016). De esta manera, pretendíamos que los futuros profesores aprendieran a problematizar la práctica y generar conocimiento útil en contextos de enseñanza, así como una actitud reflexiva que sentara las bases de lo que pudiera ser un aprendizaje a lo largo de toda su vida profesional. La experiencia de investigación en el PIC nos llevó ver a los profesores en formación como los futuros profesores que serían y lo que requerirían como tales, suavizando de este modo las barreras entre las conceptualizaciones de la formación inicial y la continua de profesores de matemáticas.

La diversidad de grados de experiencia de los profesores e investigadores implicados en el PIC (noveles y expertos, en formación inicial y continua) se ha mostrado significativa para mejorar nuestra comprensión sobre cómo se produce y caracteriza el desarrollo profesional en estos entornos colaborativos considerando las distintas fases del desarrollo del profesor. Así, mientras que la reflexión individual de Inés, la primera maestra experta informante de nuestras investigaciones, evidenciaba los rasgos principales de su desarrollo profesional (mayor conciencia metacognitiva de su práctica) y se mostraba una herramienta potenciadora de su desarrollo, observamos que la reflexión individual de Julia, la primera maestra novel informante de nuestras investigaciones, no tenía el mismo potencial para el cambio (Muñoz-Catalán *et al.*, 2010) mostrando gran rechazo a utilizar un diario personal. Esto nos llevó a utilizar herramientas metodológicas y formativas alternativas, adaptadas a su grado de experiencia.

La adopción de un enfoque social en la investigación, que nos condujo a analizar las interacciones de Julia con los demás miembros del PIC en las sesiones, nos llevó a identificar una relación entre los cambios que observábamos en su práctica (mediante las observaciones de aula) y su reacción de aceptación o rechazo hacia las sugerencias vertidas en el curso de las sesiones. La valoración que le otorgaba a cada miembro, construida en el curso de las interacciones, influía decisivamente en cómo las reflexiones (críticas y sugerencias) vertidas por los miembros se manifestaban en su práctica. Así, Inés se fue convirtiendo para Julia en un "colaborador habilidoso" (alguien en quien puedes confiar, un amigo crítico, con especiales habilidades que hace que aprecies sus sugerencias, Day, 1993), cuyas reflexiones influían decisivamente en ella y percibimos que este rol fue asumido por Inés en el PIC a lo largo de estos 20 años.

De esta manera, la reflexión grupal frente a la individual, junto a la existencia de compañeros valorados como valiosos por su conocimiento especial y capacidad para la reflexión, parecían tener un papel importante en el desarrollo profesional de todos sus miembros, y de los más noveles en particular.

Fruto de las investigaciones emergentes del PIC, desarrollamos el modelo helicoidal continuo (Carrillo *et al.*, 2007; Muñoz-Catalán *et al.*, 2010), que proporciona una perspectiva cognitiva desde la cual fuese posible interpretar y comprender el desarrollo profesional de los profesores. En este modelo, no se hace referencia a una trayectoria hipotética a seguir, sino que se proponen tres fases (interiorización, condensación y cosificación) definidas en función de las características, principios y limitaciones de cada profesor. En dichas publicaciones, mostramos cómo Julia completó un primer ciclo de interiorización-condensación-cosificación con respecto a un aspecto de su enseñanza, la planificación, que comenzó concibiendo como un documento rígido que se sigue de manera literal, concepción que va evolucionando hasta percibirla como un proceso flexible en el cual se pueden contemplar posibles dificultades de los alumnos y prever posibles modos alternativos de abordarlos. En este proceso, la reflexión, principalmente la grupal en el PIC en el caso de Julia, jugó un papel decisivo, la cual le permitió un enriquecimiento de su conocimiento didáctico del contenido a la hora de realizar el análisis didáctico necesario.

El fomento del desarrollo profesional sobre la base de la reflexión individual y grupal y la caracterización de buenas prácticas, junto con la observación de los procesos de desarrollo profesional de los profesores del PIC y la importancia que tomaba su conocimiento, nos llevó a centrar la mirada en dichos conocimientos. Conviene recordar que nuestro trabajo se centra en la formación inicial y permanente del profesorado y que, por ello, uno de nuestros objetivos dentro del PIC ha sido extraer ideas sobre el conocimiento de los profesores que pudieran incidir de manera efectiva en nuestros procesos formativos. Disponíamos de abundantes grabaciones de aula, con fragmentos que parecían tener un enorme potencial si se utilizaban en procesos formativos basados en el análisis de vídeos y para ese análisis necesitábamos herramientas analíticas potentes, que nos permitieran identificar y desmenuzar el conocimiento que los profesores ponían en juego, para poder incidir con ellos en procesos de construcción de conocimiento.

Este fue el comienzo de un camino que desembocó en la creación del modelo MTSK, aunque, como veremos en la siguiente sección, nuestros primeros estudios se basaron en el modelo MKT del grupo de la Universidad de Michigan, liderado por Deborah Ball.

EL MODELO DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS (MTSK)

Desde que centramos nuestro foco en describir el desarrollo profesional de Inés, la maestra experta del PIC antes mencionada, el estudio del conocimiento profesional formaba parte importante de la descripción de su desarrollo. Si bien definíamos el desarrollo en torno a la reflexión, observamos cómo se manifestaba su conocimiento del contenido y didáctico del contenido (estos últimos entendidos en la línea de los trabajos de Shulman, 1986, 1987). Así, constatamos la ampliación principalmente del conocimiento de Inés sobre el aprendizaje de contenidos matemáticos, a través de su proceso de reflexión-acción. De este modo, a través del foco en su práctica, Inés se dio cuenta de que sus alumnos tenían una visión restringida de triángulo y de que la posición de la figura era una variable importante para que los reconocieran (Climent, 2002).

Tanto en esta tesis doctoral como en la de Muñoz-Catalán (2009), nos aproximábamos al estudio del conocimiento del profesor en relación con la enseñanza de la matemática considerando, en el conocimiento del contenido (*subject matter knowledge* de Shulman, 1987), el conocimiento *de* matemáticas y el conocimiento *sobre* matemáticas. Mientras el conocimiento *de* matemáticas se refería a la comprensión de los factores principales, conceptos, principios marcos explicativos de la materia, el conocimiento *sobre* matemáticas (Ball, 1989) recogía el conocimiento sobre las normas de sintaxis de la materia, su naturaleza y cómo evoluciona y se genera. En el conocimiento didáctico del contenido diferenciábamos aspectos relativo al aprendizaje (como el conocimiento de características, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de un contenido concreto) y a la enseñanza (como el conocimiento de distintos modos de representar el contenido y su potencialidad).

Al foco en el conocimiento del profesor y sus concepciones se añadió la consideración de sus objetivos de enseñanza y el tipo de comunicación que promueve en el aula, de cara a modelizar su enseñanza (Ribeiro *et al.*, 2012). De este modo, pretendíamos explicar las acciones del profesor sobre la base de su cognición, con un peso fundamental en su conocimiento. En este periodo abordamos el conocimiento del profesor usando el modelo MKT (Ball *et al.*, 2008), discutiendo la interpretación de algunos de sus componentes, como el conocimiento del horizonte matemático (Figueiras *et al.*, 2011). El análisis del conocimiento del profesor desde la perspectiva del MKT da lugar a otras tesis doctorales, como la de la profesora Leticia Sosa, sobre el conocimiento para la enseñanza de la matemática de dos profesoras de Bachillerato sobre álgebra lineal (Sosa, 2011).

Durante el año 2011, el grupo de investigación creció en tamaño con la incorporación de varios estudiantes de doctorado que se unieron a las discusiones sobre conocimiento del profesor. El modelo

MKT y su uso se discutió en profundidad, poniéndose de relieve diferentes dificultades tanto en la delimitación de distintos subdominios del modelo como en su uso con fines analíticos. Los principales cuestionamientos se referían a la diferenciación del *conocimiento común* y el *conocimiento especializado* (CCK y SCK en el modelo MKT), y del *conocimiento especializado* y el *conocimiento del contenido y los estudiantes* (SCK y KCS). Por una parte, desde una perspectiva del conocimiento matemático escolar, si consideramos que los estudiantes deban aprender los porqués de los procedimientos, la diferenciación entre conocimiento común y especializado se difumina; por otra, es difícil saber con precisión qué cuestiones matemáticas necesita conocer sólo el profesor de matemáticas y no otros profesionales que usan la matemática. Ambas cuestiones inciden en la diferenciación entre conocimiento común y especializado. Por otro lado, el MKT situaba el conocimiento de los errores de los estudiantes en relación con un contenido en el KCS y el conocimiento del origen matemático de estos errores en el SCK. Esta delimitación en la práctica resultaba confusa.

Así, asumiendo los problemas de definición teóricos de MKT, y la diferencia de enfoques en la aproximación al conocimiento del profesor, se valoró la posibilidad de generar un modelo alternativo (Carrillo, 2012). Esta discusión trascendió la propia creación de lo que acabaría siendo el modelo MTSK, e implicó la explicitación y consenso de los principios, paradigmas y creencias que, como grupo de investigación, compartimos. Así, reflexionamos, discutimos y plasmamos por escrito desde nuestro posicionamiento en relación con qué entendíamos por conocimiento, creencias y concepciones, hasta cuáles eran las concepciones de nuestro grupo sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática y qué características asociábamos al conocimiento del profesor (Carrillo *et al.*, 2014). Este proceso sucedió en paralelo al progresivo crecimiento del grupo SIDM, que fue incorporando a investigadores de diversas universidades e instituciones iberoamericanas ligadas a la formación del profesorado, por lo que el esfuerzo realizado en la conceptualización de MTSK se hizo desde una perspectiva sensible a distintas realidades educativas.

En 2012, en el Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y, posteriormente en el Congreso Europeo en Educación Matemática, se presentó y discutió el modelo MTSK. Desde la perspectiva del grupo, estas presentaciones no sólo tenían como utilidad visibilizar el trabajo que se realizaba, sino también tener la posibilidad de que investigadores con amplia experiencia y trayectoria analizaran la propuesta. De estas reuniones científicas surgieron nuevas preguntas que permitieron refinar el modelo. En Carrillo *et al.* (2013) se puede encontrar una detallada descripción de cómo se configuran los elementos del modelo MTSK para dar respuesta a las problemáticas surgidas con el uso del modelo MKT.

La presentación de los primeros avances sobre la creación del modelo MTSK en el CERME del 2013 recibe una buena acogida y nos anima a seguir profundizando en el desarrollo del modelo. Esto se consigue con el trabajo compartido de un equipo de investigación numeroso, conformado en gran parte por doctorandos que centran en este tema sus tesis doctorales, sus directores y otros investigadores expertos implicados. Así, entre 2014 y 2015 se leen 6 tesis doctorales que posibilitan un gran avance en

el desarrollo del modelo. La tesis doctoral de Nielka Rojas hace uso del análisis didáctico (Rico *et al.*, 2013) del contenido de los números racionales para identificar categorías de los subdominios del modelo MTSK en relación con la enseñanza de este tema (Rojas *et al.*, 2015).

En la tesis de Jeferson Moriel Junior, sobre el conocimiento especializado de profesores sobre la división de fracciones en un contexto formativo, encontramos una primera identificación de categorías de los subdominios del MTSK, concretadas al tópico en cuestión. Estas categorías son especialmente ricas en el subdominio del *conocimiento de los temas* (Knowledge of Topics, KoT) donde se diferenciaba el conocimiento de: términos y definiciones, propiedades, interpretaciones y problemas, algoritmos y procedimientos, justificativas y demostraciones, y representaciones y ejemplos (Moriel-Junior *et al.*, 2019).

La tesis de Miguel Ángel Montes ilustra la noción de especialización desde el MTSK aplicada a un tema matemático que puede ser considerado transversal a muchos otros, la noción de infinito. Su carácter de conector de diferentes conocimientos matemáticos le permite profundizar en el subdominio del conocimiento de la estructura de la matemática (Knowledge of the Structure of Mathematics, KSM) y en el papel de las grandes ideas (Kuntze *et al.*, 2011) en este subdominio (Montes & Carrillo, 2017). En este trabajo, situaciones hipotéticas de aula diseñadas desde el modelo MTSK muestran su potencial para comprender el conocimiento especializado de un profesor sobre un tema, y se pone de manifiesto cómo el uso del modelo pretende comprender (y no evaluar) el conocimiento del profesor.

El avance en la profundización y categorización de los subdominios *conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas* (Knowledge of Features of Learning Mathematics, KFLM), *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (Knowledge of Mathematics Teaching, KMT) y *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (Knowledge of Mathematics Learning Standards, KMLS), los tres subdominios diferenciados en el dominio del conocimiento didáctico del contenido, es propulsado por la tesis de Dinazar Escudero. En Escudero-Ávila & Carrillo (2020) se detalla cómo se construyó la conceptualización y categorización de los subdominios del dominio del conocimiento didáctico del contenido del modelo MTSK. En particular, se ilustra el proceso inicialmente de *top-down* (de la teoría a los datos) para generar una caracterización general de los subdominios basada en la discusión de lecturas y, posteriormente, de *bottom-up* (de los datos a la teoría) (Niss, 2006) para construir un sistema de categorías de los subdominios que permitieran explicar los datos y caracterizar cada subdominio.

La tesis de Diana Vasco muestra una categorización de los subdominios del dominio del conocimiento matemático cercana a la que disponemos en estos momentos. En especial, su trabajo sirvió para profundizar en el subdominio del *conocimiento de los temas*, refinándose las categorías de análisis. En su estudio se exploran tanto el conocimiento especializado como las concepciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática de dos profesores universitarios de álgebra lineal, encontrándose elementos claves de su práctica, como el papel que atribuye a los errores de los estudiantes, que permiten explicar relaciones entre su conocimiento matemático, didáctico del contenido y concepciones (Vasco & Climent, 2021).

Finalmente, la tesis de Eric Flores explora en las relaciones entre concepciones y conocimiento especializado del profesor, mostrando cómo, por ejemplo, una concepción tecnológica de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en la que la actividad del aula se centra en simular el proceso de construcción de los contenidos matemáticos, se relaciona con un rico conocimiento de los temas, lo que posibilita dicha reconstrucción (Flores & Carrillo, 2014). En las tesis citadas se contrasta el uso analítico del modelo MTSK en diferentes escenarios de recogida de información (observación de aula, planificación de la enseñanza, reflexión tras la práctica, contextos formativos online, entrevistas y grupos de discusión), hecho sobre el que se reflexiona en la tesis de Flores (Flores *et al.*, 2013).

Los trabajos anteriores permiten construir el modelo MTSK, de modo profundamente colaborativo, contrastando los resultados de los distintos estudios y consensuando interpretaciones. Plasmamos entonces una caracterización más refinada de los dominios y subdominios, así como su categorización en varios artículos internacionales (Carrillo *et al.*, 2017; Carrillo, Montes *et al.*, 2017; Carrillo *et al.*, 2018).

A estas tesis doctorales e investigaciones, siguen otros estudios que continúan explorando en su aplicación a diferentes niveles educativos, contenidos matemáticos y contextos, así como cuestionándose algunas posibles limitaciones del modelo. Así, se explora cómo el modelo MTSK permite comprender el conocimiento especializado del profesor de un modo integrado, de forma que el afán analítico que lleva a desglosar este conocimiento a través de las categorías de análisis puede ser después revertido para estudiar las relaciones entre los elementos de conocimiento identificados (Aguilar *et al.*, 2019). Surge también el potencial del modelo MTSK para analizar no solo el conocimiento que moviliza el profesor en el aula sino el que podría haber sido desplegado con otra gestión del aula, de cara a usarlo en contextos formativos (Liñán-García *et al.*, 2021).

De los subdominios del MTSK, dos de ellos, el *conocimiento de la estructura de la matemática* y el *conocimiento de la práctica matemática* (Knowledge of Practices in Mathematics, KPM) han sido los más difíciles de caracterizar. El primero de ellos se refiere a un conocimiento del contenido por parte del profesor conectado y el segundo a su conocimiento sobre cómo se hacen matemáticas (cómo se define, se demuestra, se conjetura, etc.). Ha resultado más costoso, además, identificar evidencias de conocimiento en estos subdominios que de otros, lo que hace pensar en la necesidad de usar otras fuentes de información diferentes a las empleadas hasta ahora. La ampliación del estudio del MTSK en investigaciones en otros países, ha permitido que se profundice en el KPM con propuestas de categorizaciones (Alfaro *et al.*, 2020; Delgado & Zakaryan, 2020).

Una vez ha adquirido cierta consolidación, el estudio con el modelo MTSK ha buscado trascender la caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas para fijarse en su desarrollo y construcción. Dicha consolidación ha sido posible a través de su aplicación al estudio de profesores en diferentes contextos, sobre la enseñanza de contenidos variados y en de distintos niveles, desde Educación Infantil (Muñoz-Catalán *et al.*, 2021) hasta Universidad (Vasco & Climent, 2021), pasando por Educación Secundaria o Media (Espinoza-Vásquez *et al.*, 2018). Es por eso por lo que nos preguntamos por cuál es el

conocimiento que requiere el formador de profesores de matemáticas y el posible carácter especializado de éste (Almeida & Ribeiro, 2019; Escudero-Ávila *et al.*, 2021; Pascual *et al.*, 2021) y cómo aplicar el modelo MTSK para promover el diseño de tareas formativas y programas de formación (Montes *et al.*, 2019; Ribeiro *et al.*, 2021), y para estudiar el conocimiento que se promueve (Carreño & Climent, 2019).

En algunas investigaciones el modelo MTSK ha sido usado con otros marcos teóricos o cuestionado desde otras perspectivas. Así, además del uso del análisis didáctico, nos ha interesado cuáles podrían ser los resultados del diálogo entre el modelo MTSK y el del Espacio de Trabajo Matemático (ETM) (Kuzniak, 2011), de cara a comprender la acción del profesor y el papel en esta de su conocimiento especializado (Flores-Medrano *et al.*, 2016; Vasco-Mora *et al.*, 2016).

La colaboración con investigadores de diferentes países y la diseminación del uso del modelo MTSK fueron permitiendo el establecimiento de conexiones que nos llevaron a plantearnos la creación de una red iberoamericana. El reconocimiento de esta red, la Red Iberoamericana MTSK (*Red Iberoamericana sobre Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas*) se obtuvo con su aprobación por la Asociación Universitaria Iberoamericana de Postgrado (AUIP) en octubre de 2020. Ahora bien, veníamos trabajando como tal desde dos años antes de la concesión oficial de la Red, liderados por el profesor José Carrillo, de la Universidad de Huelva. La Red, conformada por 129 investigadores de 10 países iberoamericanos (Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Ecuador, España, México, Perú, Venezuela) e Italia, y 52 universidades distintas, pretende contribuir a la mejora de la formación del profesorado de matemáticas y de sus formadores, así como la consolidación de equipos de investigación sobre este foco.

Con la Red esperamos que se fortalezcan los vínculos entre investigadores a nivel internacional interesados en el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, y se creen nuevos. Las líneas de investigación de la Red se reflejan en las cinco temáticas en las que hemos organizado su funcionamiento: aplicaciones del modelo MTSK en la formación de profesores; conocimiento del formador de profesores de matemáticas; conocimiento especializado en relación con distintos tópicos y etapas; desarrollo del modelo MTSK; y extensiones del modelo MTSK. Esta red refleja el hecho de que los trabajos descritos en las secciones anteriores se caracterizan, entre otras cosas, por reflejar un progresivo grado de colaboración entre investigadores de la Universidad de Huelva e investigadores vinculados a otras instituciones. Se pretende que dicha colaboración se siga ampliando, lo cual contribuirá a la sensibilización de las investigaciones a distintas realidades socioculturales.

LÍNEAS FUTURAS

Los últimos 30 años de investigaciones sobre el profesor de matemáticas y su desarrollo profesional constituyen una base sobre la que, en los próximos años, se pretenden desarrollar trabajos en diversas líneas de investigación. Estas líneas se articulan entorno a cinco ejes fundamentales e interconectados, en los que el modelo MTSK se convierte en un referente central. Estos cinco ejes son:

(i) el refinamiento del modelo MTSK y su uso; (ii) su adaptación y/o extensión a otras disciplinas, y a otros contenidos, así como a otros agentes de enseñanza, como el formador de profesores; (iii) la conceptualización del proceso de construcción de conocimiento profesional, desde la óptica de MTSK; (iv) la aplicación del modelo MTSK, en distintas escalas, a los procesos de formación de profesores de distintos niveles; y (v) la difusión, divulgación, y transferencia del modelo MTSK y los resultados de las investigaciones que lo usan. Estos cinco ejes, vinculados a la Red Iberoamericana MTSK, reflejan ámbitos en los que se está indagando, con diferentes niveles de desarrollo, usando el modelo MTSK.

Los últimos diez años de investigación en la Universidad de Huelva se han centrado en la construcción del modelo MTSK. Por tanto, el eje (i) se desarrollará como continuidad de los trabajos anteriormente desarrollados, dado que el propio modelo, a pesar de ser una conceptualización estable, consensuada, y extendida, requiere de profundización en diversos elementos. Por ejemplo, el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM) sigue necesitando de mayor profundización. En este sentido, es necesario desarrollar protocolos metodológicos que permitan poner de relieve aquellos subdominios que, como el KPM o el KSM, resultan más complejos de identificar. Asimismo, se pretende continuar con los trabajos ya iniciados que buscan caracterizar en profundidad el conocimiento de docentes que enseñan matemáticas en contextos diferentes a Primaria o Secundaria, como por ejemplo en Educación Infantil, dada la singular naturaleza del contenido matemático en dicha etapa.

El eje (ii), vinculado a la extensión y/o adaptación del modelo a otras disciplinas, es una línea emergente de investigación, que pretende caracterizar el conocimiento especializado de profesores de otras disciplinas. Genéricamente, se pretende desarrollar XTSK, donde X corresponde a cierta disciplina escolar distinta de la matemática (e.g. biología, química, física, ciencias sociales, etc.). Existen ya trabajos en este sentido que se acercan a la caracterización del conocimiento del profesor de biología (Luis & Carrillo, 2020). Asimismo, también se avanza actualmente, como hemos señalado, en la caracterización del conocimiento especializado del formador de profesores de matemáticas, asumiendo la necesidad de plantearse, como se hizo en los inicios de la génesis del modelo MTSK con la matemática, la naturaleza del contenido que se enseña durante la formación inicial. Nos planteamos también la posibilidad de profundizar en aspectos socioculturales, y cómo estos permean el conocimiento especializado, con las consiguientes potenciales implicaciones en el contenido del modelo. Finalmente, la situación derivada de la pandemia por el COVID-19 y sus múltiples variantes ha puesto de relieve no sólo la posibilidad, sino también la necesidad de que los profesores y estudiantes para profesor puedan desarrollar y movilizar su conocimiento en contextos online. Cabe pues plantearse si el modelo MTSK requiere de adaptaciones para ser sensible a la naturaleza de la docencia online.

En cuanto al eje (iii), este se corresponde con la necesidad de adoptar una perspectiva dinámica sobre la construcción de conocimiento especializado por parte de los docentes que enseñan matemáticas. El modelo MTSK constituye, en la actualidad, una herramienta que permite acceder a momentos puntuales de la labor docente, pero cabe plantearse cuál es el proceso de construcción de dicho

conocimiento, por ejemplo, en la formación inicial. De forma profundamente interrelacionada a esto, encontramos el eje (iv), en el que pretendemos desarrollar tareas de formación inicial y continua de profesores de distintos niveles, teniendo en cuenta tanto la estructuración que propone MTSK, que permitirá determinar qué elementos de conocimiento se buscan construir, como las distintas tareas profesionales que desempeña un profesor de matemáticas (Carrillo, 2017).

El eje (v) responde a la necesidad de que los trabajos que se desarrollan en el seno de la universidad, como trabajos de investigación, no limiten su impacto a un ámbito local, circunscrito a las instituciones en las que se desarrolla. Así, este eje tiene por objetivo difundir los trabajos de investigación en MTSK, para que otros investigadores puedan hacer uso de los mismos, así como hacer llegar los resultados de las investigaciones con MTSK a agentes educativos interesados, de forma que puedan ser transferidos a la formación de docentes que enseñarán matemáticas en diversos ámbitos y niveles.

Desde la motivación inicial de nuestro grupo de investigación, que fue la de poder intervenir en la formación continua del profesorado de matemáticas de modo que incidiera en las prácticas del aula, hasta la actual motivación por investigar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas y de otras disciplinas escolares, algunas cuestiones claves se han venido perfilando en nuestra comprensión del profesorado. Entre ellas se sitúa la consideración de esta formación como un continuo, desde la formación inicial a la del profesor en ejercicio. Esto conlleva que el estudio del profesor en ejercicio sea referente para situar la formación inicial de profesores y para diseñar tareas y entornos formativos (Carrillo *et al.*, 2020).

Otra cuestión que se ha consolidado es la importancia de la resolución de problemas como actividad vertebradora del aula de matemáticas, y nuestro interés por la formación del profesorado en ese sentido (Carrillo *et al.*, 2019). La implementación de la resolución de problemas como metodología en la enseñanza de las matemáticas fue la motivación de la formación continua de profesores que originó la investigación del grupo, es la motivación del PIC y nuestro referente cuando pensamos en el conocimiento que necesita el profesor de matemáticas. Si bien el modelo MTSK permite el análisis de prácticas de profesores de distintas tendencias didácticas, nuestro deseo es contribuir a formar profesores que promuevan actividades de resolución de problemas en sus aulas.

ACLARATORIAS

Los autores del artículo declararan que no existe ningún conflicto de interés con los editores de la revista ni con otros agentes implicados en el proceso de revisión y publicación. En el transcurso de la escritura de este artículo, se produjo el lamentable fallecimiento de José Carrillo Yañez (Pepe Carrillo), su primer autor. La trayectoria de investigación que aquí narramos parte de su inquietud y de su tesis doctoral y se debe en gran medida a su esfuerzo como propulsor e investigador incansable, así como de su talante personal. Debido a ello, el resto de los autores dedicamos este artículo a Pepe en homenaje a su memoria.

REFERENCIAS

- Aguilar-González, Á., Muñoz-Catalán, M. C., & Carrillo, J. (2019). An example of connections between the mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(2), em1664. <https://doi.org/10.29333/ejmste/101598>
- Alfaro, C., Flores, P., & Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA* 14(2), 85–117. <https://doi.org/10.30827/pna.v14i2.9363>
- Almeida, M. V. R., & Ribeiro, M. (2019). Conhecimento especializado do formador de professores de Matemática ao discutir a relação de ordem no conjunto dos números inteiros. *Quadrante*, 28, 125–148. <https://doi.org/10.48489/quadrante.23015>
- Ball, D. L. (1989). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. En J. Brophy (Ed.), *Advances in Research on Teaching*. Vol. 2 (pp. 1–48). JAI Press.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177%2F0022487108324554>
- Brown, C.C., & Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 209–239). McMillan.
- Carreño, E., & Climent, N. (2019). Conocimiento especializado de futuros profesores de matemáticas de secundaria. Un estudio en torno a definiciones de cuadriláteros. *PNA*, 14(1), 23–53. <https://doi.org/10.30827/pna.v14i1.9265>
- Carreño, E., Ribeiro, M., & Climent, N. (2013). Specialized and horizon content knowledge discussing prospective teachers knowledge on polygons. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 2966–2975). Middle East Technical University.
- Carreño, E., Rojas, N., Montes, M. A., & Flores, P. (2013). Mathematics teacher's specialized knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 2976–2984). Middle East Technical University.
- Carrillo, J. (1998). La resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Ejemplificaciones del para qué. *Épsilon*, 40, 15-16.
- Carrillo, J. (2012). *Del mathematical knowledge for teaching al mathematics teacher's specialised knowledge*. Documento Interno.

- Carrillo, J. (2017). Idiosincrasia del MTSK, investigaciones realizadas y utilidades. En J. Carrillo & L. C. Contreras (Eds.), *Avances, utilidades y restos del modelo MTSK* (pp. 7–10). CG.SE.
- Carrillo, J., & Climent, N. (2007). El uso del video para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la Escuela*, 61, 23–35.
- Carrillo, J., & Climent, N. (2009). From professional tasks in collaborative environments to educational tasks in mathematics teacher education. En B. Clarke, B. Grevholm & R. Millman (Eds.), *Tasks in Primary Mathematics Teacher Education. Mathematics Teacher Education. Vol. 4* (pp. 215–234). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09669-8_15.
- Carrillo, J., & Climent, N. (2011). The development of teachers' expertise through their analysis of good practice in the mathematics classroom. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*. 43(6–7), 915–926. <https://doi.org/10.1007/s11858-011-0363-0>
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M., Escudero-Ávila, D., & Flores-Medrano, E. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Universidad de Huelva Publicaciones.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Montes, M. (2019). Mathematics teachers' specialised knowledge in managing problem-solving classroom tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl & B. Koichu (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 297–316). Springer.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Montes, M. (2020). Using professional development contexts to structure prospective teacher education. En S. Llinares & O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2*. (pp. 393–419). Brill/Sense. https://doi.org/10.1163/9789004418967_015
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(1), 33–44.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 2985–2994). Middle East Technical University.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Ribeiro, C. M. (2017). Mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) in the “Dissecting an equilateral triangle” problem. *RIPEM - International Journal for Research in Mathematics Education*, 7(2), 88–107.

- Carrillo, J., Climent, N., Gorgorió, N., Prat, M., & Rojas, F. J. (2008). Análisis de secuencias de aprendizaje matemático desde la perspectiva de la gestión de la participación. *Enseñanza de las Ciencias*, 26(1), 67–76.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores–Medrano, E., Escudero–Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar–González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., & Contreras, L. C. (1994). The relationship between the conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis. En J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18 th PME Conference. Vol. II* (pp.152–159). PME.
- Carrillo, J., & Contreras, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza. *Educación Matemática*, 7(3), 79–92.
- Carrillo, J., Contreras, L. C., & Flores, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina & I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193–200). Comares.
- Carrillo, J., Montes, M., Contreras, L. C., & Climent, N. (2017). El conocimiento del profesor desde una perspectiva basada en su especialización: MTSK. *Annales de didactique et des sciences cognitives*, 22, 185–205.
- Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de caso*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. <http://hdl.handle.net/10272/2742>
- Climent, N., & Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 387–404.
- Climent, N., & Carrillo, J. (2007). El uso del vídeo para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Revista Investigación en la Escuela*, 61, 23–35.
- Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Carrillo, J., Liñan, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Barrera, V. J., & León, F. (2016). Construcción de conocimiento sobre características de aprendizaje de las matemáticas a través del análisis de videos. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 9, 85–103. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i9.108>

- Climent, N., Romero-Cortés, J. M., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M. C., & Contreras, L. C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 13–36.
- Contreras, L. C., & Carrillo, J. (1997). La resolución de problemas en la construcción de conocimiento. Un ejemplo. *Suma*, 24, 21–25.
- Day, C. (1993). Reflection: A necessary but not sufficient condition for professional development. *British Educational Research Journal*, 19(1), 83–93.
- Delgado, R., & Zakaryan, D. (2020). Relationships between the knowledge of practices in mathematics and the pedagogical content knowledge of a mathematics lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(3), 567–587. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0>
- Dewey, J. (1933/2003). *How we think: A restatement of the relation of reflective thinking to the educative process* (Rev. ed.). En L. A. Hickman (Series Ed.), *The later works of John Dewey, 1925–1953: Vol. 8, 1933* (pp. 107–352). Southern Illinois University Press.
- Ernest, P. (1989a). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop & P. Gerdes (Eds.), *Mathematics Education and Society* (pp. 99–101). UNESCO.
- Ernest, P. (1989b). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: A model. *Journal of education for teaching*, 15(1), 13–33.
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. The Falmer Press.
- Escudero-Ávila, D. I., & Carrillo, J. (2020). El Conocimiento didáctico del contenido: Bases teóricas y metodológicas para su caracterización como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. *Educación Matemática*, 32(2), 8–38. <https://doi.org/10.24844/EM3202.01>
- Escudero-Ávila, D., Montes, M., & Contreras L. C. (2021). What do mathematics teacher educators need to know? Reflections emerging from the content of mathematics teacher education. En M. Goos & K. Beswick (Eds.), *The Learning and Development of Mathematics Teacher Educators. Research in Mathematics Education* (pp. 23–40). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62408-8_2
- Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D., & Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(3), 301–324. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2133>

- Feldman, A. (1993). Promoting equitable collaboration between university researchers and school teachers. *Qualitative Studies in Education*, 6(4), 341–357.
- Fernandez, C., & Yoshida, M. (2012). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Routledge.
- Figueiras, L., Ribeiro, C. M., Carrillo, J., Fernández, S., & Deulofeu, J. (2011). Teacher's advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: a response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics*, 31(3), 26–28.
- Flores, E., & Carrillo, J. (2014). Connecting a mathematics teacher's conceptions and specialised knowledge through her practice. En P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36*. Vol. 3 (pp. 81–88). PME.
- Flores, E., Escudero, D. I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent, N (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275–282). SEIEM. <https://www.seiem.es/docs/actas/17/Actas17SEIEM.pdf>
- Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. I., & Carrillo, J. (2013). A theoretical review of specialized content knowledge. En B. Ubuz, C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 3055–3064). Middle East Technical University.
- Flores-Medrano, E., Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Muñoz-Catalán, M. C., & Liñán, M. M. (2016). El Papel del MTSK como modelo de conocimiento del profesor en las interrelaciones entre los espacios de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 204–221. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a10>
- Kuhs, T., & Ball, D. L. (1986). *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills, and dispositions*. NCRTE, Michigan State University.
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.
- Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H. S., & Winbourne, P. (2011). Professional knowledge related to Big Ideas in mathematics-an empirical study with pre-service teachers. *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2717–2726). CERME. <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/ERME/CERME7-Proceedings-2011.pdf>

- Lieberman, A. (1986). Collaborative research: working with, not working on.... *Educational Leadership*, 43, 28–33.
- Liñán-García, M. d. M., Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., & Barrera-Castarnado, V. J. (2021). Specialised knowledge for teaching geometry in a primary education class: Analysis from the knowledge mobilized by a teacher and the knowledge evoked in the researcher. *Mathematics*, 9, 2805. <https://doi.org/10.3390/math9212805>
- Luis, M., & Carrillo, J. (2020). O modelo do conhecimento especializado do professor de Biologia (BTSK). *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 11(7), 19–36. <https://doi.org/10.26843/10.26843/rencima.v11i7.2788>
- Montes, M., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). MSTK: from common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures. En B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME8* (pp. 3185–3194). Middle East Technical University.
- Montes, M., & Carrillo, J. (2017). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas acerca del infinito. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 114–134. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a06>
- Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., & Barrera-Castarnado, V. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: Una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández & M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: Prácticas sobre el aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (pp.157–176). Ediciones Universidad de Salamanca.
- Moriel-Junior, J. G., Wielewski, G. D., & Carrillo, J. (2019). Meta-análise sobre conhecimento para ensinar divisão de frações. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(65), 988–1026. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a02>
- Muñoz-Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. <http://hdl.handle.net/10272/2949>
- Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N., Carrillo, J., & Contreras, L. C. (2010). Cognitive processes associated with the professional development of the mathematics teacher. *PNA*, 4(3), 87–97.
- Muñoz-Catalán, M. C., Ramírez-García, M., Joglar-Prieto, N., & Carrillo, J. (2021). Early childhood teachers' specialised knowledge to promote algebraic thinking as from a task of additive decomposition. *Journal for the Study of Education and Development*, 1–21. <https://doi.org/10.1080/02103702.2021.1946640>

- Niss, M. (2006). The concept and role of theory in mathematics education. En C. Bergsten, B. Grevholm, H. Måsøval & F. Rønning (Eds.), *Relating Practice and Research in Mathematics Education. Proceedings of Norma 05*, (pp. 97–110). Editorial.
- Pajares, M. F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of educational research*, 62(3), 307–332.
- Pascual, M. I., Montes, M., & Contreras, L. C. (2021). The pedagogical knowledge deployed by a primary mathematics teacher educator in teaching symmetry. *Mathematics*, 9, 1241. <https://doi.org/10.3390/math9111241>
- Ponte, J. P. D. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. I* (pp. 195–210). PME.
- Porlán, R. (1989). *Teoría del conocimiento, teoría de la enseñanza y desarrollo profesional*. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.
- Porlán, R. (1992). Teoría y práctica del curriculum. El curriculum en la acción. *AA. VV. Curso de Actualización Científico Didáctica*. MEC.
- Ribeiro, M., Almeida, A., & Mellone, M. (2021). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(35), 1–32. <https://doi.org/10.46312/pem.v14i35.13263>
- Ribeiro, C., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2012). Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido. *Revista Latinoamericana de Investigación Educativa*, 15(1), 93–121.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L., & Molina, M. (2013). *El análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores*. Universidad de Granada.
- Rojas, N., Flores, P., & Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 143–166. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08>
- Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Basic Books.
- Schön, D. A. (1987). *Educating the reflective practitioner*. Jossey-Bass.

- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–23. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. <http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/4509>
- Thompson, A. G. (1991). The development of teachers' conceptions of mathematics teaching. En R. G. Underhill (ed.), *Proceedings of the thirteenth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2 (pp. 8–14). ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Thompson, A. G. (1992) Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 127–146). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Vasco, D., & Climent, N. (2021). The specialized knowledge and beliefs of two university lecturers in linear algebra. En S. Zehetmeier, D. Potari & M. Ribeiro (Eds.), *Professional development and knowledge of mathematics teachers* (pp. 104–123). Routledge.
- Vasco-Mora, D., Climent, N, Escudero-Ávila, D., Montes, M, & Ribeiro, M. (2016). Conocimiento especializado de un profesor de álgebra lineal y espacios de trabajo matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 222–239. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a11>

Cómo citar este artículo:

- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2022). Una trayectoria de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas: del grupo SIDM a la Red Iberoamericana MTSK. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, 2(2), e202204. <https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.41>



Copyright © 2022. José Carrilo Yañez, Nuria Climent Rodríguez, Miguel Montes Navarro y María Cinta Muñoz-Catalán. Esta obra está protegida por una licencia [Creative Commons 4.0. International \(CC BY 4.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Usted es libre para Compartir —copiar y redistribuir el material en cualquier medio o formato— y Adaptar el documento —remezclar, transformar y crear a partir del material— para cualquier propósito, incluso para fines comerciales, siempre que cumpla la condición de:

Atribución: Usted debe dar crédito a la obra original de manera adecuada, proporcionar un enlace a la licencia, e indicar si se han realizado cambios. Puede hacerlo en cualquier forma razonable, pero no de forma tal que sugiera que tiene el apoyo del licenciante o lo recibe por el uso que hace de la obra.

[*Resumen de licencia - Texto completo de la licencia*](#)