ISSN: 2739-039X
www.reviem.com.ve
Asociación Aprender en Red
Asociación Venezolana de Educación Matemática
Vol. 4, No. 1
DOI: 10.54541/reviem.v4i1.100

# Diseño didáctico para desarrollar el Álgebra Temprana en estudiantes de 9-10 años al generalizar patrones

## Didactic design for developing Early Algebra in 9-10 year-old students through pattern generalization

## Design didático para desenvolver a Álgebra Inicial em estudantes de 9-10 Anos por meio da generalização de padrões

Montserrat Azcona Chávez [1]

Luis Manuel Cabrera Chim [2]

[1] Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, México

[2] Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Puebla, México

*Recibido: 07/01/2024 – Aceptado: 09/07/2024 – Publicado: 26/07/2024*

*Remita cualquier duda sobre esta obra a: Montserrat Azcona Chávez*
*Correo electrónico: montse_azcona@hotmail.com*

## Resumen

Para hacer frente a los desafíos del aprendizaje del álgebra, se ha desarrollado un movimiento denominado Álgebra Temprana. Desde este movimiento se promueve el desarrollo del álgebra desde edades tempranas mediante la generalización de patrones. Sin embargo, algunos estudios han mostrado las dificultades que enfrentan los estudiantes para lograr estos procesos de generalización. El objetivo de esta propuesta didáctica es generar un diseño que permita a estudiantes de 9 y 10 años desarrollar el pensamiento algebraico. Esta propuesta se sustentó en la perspectiva didáctica del álgebra como instrumento de modelización matemática, particularmente para generalizar patrones. La metodología para la elaboración, implementación y validación de las actividades tuvo en cuenta el enfoque de investigación basada en diseño y el Método Singapur (MS). La propuesta se aplicó en una escuela privada en México y el análisis de las respuestas de los estudiantes se basó en los niveles del álgebra temprana. Los resultados muestran que transitar por las etapas del MS (concreta, pictórica y abstracta) favorece que los estudiantes puedan identificar las regularidades de los patrones y plantear sus reglas generales, empleando elementos simbólicos y alcanzando el nivel 2 de algebrización.

***Palabras clave*:** Álgebra Temprana; Patrones numéricos; Generalización; Método Singapur; Diseño didáctico.

### Abstract

To address the challenges of learning algebra, a movement called Early Algebra has been developed. This movement promotes the development of algebra from an early age through the generalization of patterns. However, some studies have shown the difficulties students face in achieving these generalization processes. The aim of this didactic proposal is to create a design that enables 9 and 10-year-old students to develop algebraic thinking. This proposal is based on the didactic perspective of algebra as a tool for mathematical modeling, particularly for generalizing patterns. The methodology for the development, implementation, and validation of the activities considered the design-based research approach and the Singapore Method (SM). The proposal was applied in a private school in Mexico, and the analysis of students' responses was based on the levels of early algebra. The results show that progressing through the stages of the SM (concrete, pictorial, and abstract) helps students identify the regularities in patterns and formulate their general rules, using symbolic elements and reaching level 2 of algebraization.

***Keywords*:** Early Algebra; Numerical patterns; Generalization; Singapore Method; Didactic design.


### Resumo

Para enfrentar os desafios da aprendizagem da álgebra, foi desenvolvido um movimento denominado Álgebra Inicial. Esse movimento promove o desenvolvimento da álgebra desde a infância por meio da generalização de padrões. No entanto, alguns estudos têm mostrado as dificuldades que os alunos enfrentam para alcançar esses processos de generalização. O objetivo desta proposta didática é criar um design que permita a alunos de 9 e 10 anos desenvolver o pensamento algébrico. Esta proposta baseia-se na perspectiva didática da álgebra como ferramenta de modelagem matemática, particularmente para generalizar padrões. A metodologia para a elaboração, implementação e validação das atividades considerou a abordagem de pesquisa baseada em design e o Método de Singapura (MS). A proposta foi aplicada em uma escola particular no México e a análise das respostas dos alunos foi baseada nos níveis da álgebra inicial. Os resultados mostram que, ao seguir as etapas do MS (concreta, pictórica e abstrata), os alunos conseguem identificar as regularidades dos padrões e formular suas regras gerais, utilizando elementos simbólicos e alcançando o nível 2 de algebrização.

***Palavras-chave*:** Álgebra Inicial; Padrões numéricos; Generalização; Método de Singapura; Design didático.

## INTRODUCCIÓN

En México, tradicionalmente se ha puesto un fuerte énfasis en el desarrollo de habilidades numéricas, métricas y geométricas durante la educación primaria, mientras que el pensamiento algebraico se aborda principalmente en la educación secundaria (Secretaría de Educación Pública, 2017). Sin embargo, diversos estudios han mostrado que los estudiantes de secundaria suelen enfrentar dificultades para comprender el álgebra (Ramos *et al*., 2021). Esto, a su vez, compromete el desarrollo del pensamiento algebraico y se evidencia en las dificultades que tienen los estudiantes de secundaria para generalizar situaciones y formular expresiones algebraicas. Autores como Ureña *et al.* (2023) han argumentado que lo anterior es debido a la tardía introducción del álgebra en el currículo escolar. Además, estas dificultades impactan en el rendimiento académico de los estudiantes y podrían contribuir a la deserción escolar (Hernández, 2014).

Para contrarrestar la situación –la cual no es particular de México– en Estados Unidos se desarrolló un movimiento llamado Álgebra Temprana que propone que el álgebra sea estudiada desde los tres años de vida por medio de la generalización de patrones numéricos (Kieran *et al*., 2016). Pincheira Hauck y Alsina (2021) señalan la importancia de incorporar el estudio del álgebra desde el inicio de la educación primaria. Para estos autores, la introducción de este conocimiento desde los primeros años de educación lleva a que los estudiantes desarrollen habilidades que promoverán la comprensión de las matemáticas. Estos autores identificaron acciones que fomentan un acercamiento algebraico, tales como la experimentación, las seriaciones a partir de patrones, la descripción de cambios cualitativos y cuantitativos, y el uso de símbolos en las acciones anteriores. Asimismo, Zapatera (2022) evidencia cómo los estudiantes de entre 8 y 12 años pueden construir nociones del álgebra, aunque los estudiantes de menor edad presentan problemas para lograr esto y alcanzar los mismos niveles que los mayores. En este último sentido, Minosso y Panossian (2023), en su estudio sobre la importancia de la enseñanza del álgebra desde edades tempranas, también evidencian que los estudiantes pueden presentar dificultades para reconocer la variación e identificar valores fijos en una situación algebraica.

De acuerdo con lo anterior, existe un vínculo importante entre el desarrollo del pensamiento algebraico –desde una perspectiva de modelación– y el desarrollo del Pensamiento Variacional, es decir, las habilidades para estudiar el cambio (Mejía, 2018). Castro (2012) señala que cuando los estudiantes de secundaria tienen pocas habilidades para estudiar lo que cambia, también tienen pocas herramientas para comprender temas asociados con la generalización. En el caso de México, el desarrollo del pensamiento variacional comienza a impartirse formalmente en quinto grado de primaria (niños de 10 años) (Secretaría de Educación Pública, 2017). No obstante, el estudio de Cabrera-Chim *et al*. (2023) evidencia que varias actividades de los libros de texto de grados anteriores a quinto requieren de un pensamiento variacional, pero su desarrollo no se propone de forma adecuada. Esta situación podría afectar la aplicación de la propuesta de la corriente del Álgebra Temprana en México.

De acuerdo con lo descrito hasta ahora, una forma de contribuir a una mejora en el aprendizaje del álgebra es comenzar su estudio desde edades tempranas, vinculando su desarrollo con la generalización de patrones desde una perspectiva de modelación. Sin embargo, para lograr esto, es necesario que los estudiantes también desarrollen habilidades que les permitan estudiar dichos patrones –pensamiento variacional– y realizar la generalización de su comportamiento. Así, este estudio tiene como intención contribuir a atender esta situación a través de generar un diseño para el aula que permita desarrollar aprendizajes algebraicos. Para ello, se tiene como objetivo generar una propuesta didáctica basada en el Método Singapur (MS) y en la generalización de patrones numéricos –modelización algebraica– para promover el desarrollo del álgebra temprana en estudiantes de cuarto año de primaria (9-10 años) en México.

## MARCO TEÓRICO

En la década de los 90′s, como consecuencia de las dificultades de aprendizaje del álgebra, en Estados Unidos surge un movimiento denominado Álgebra Temprana –en inglés, *Early algebra*. Este movimiento propone introducir el estudio del álgebra desde la educación preescolar, es decir, entre los 3 y 6 años (Alsina, 2019). Su objetivo es que los estudiantes logren tanto utilizar números y palabras para expresar transformaciones aritméticas en términos generales (Britt, 2011), como desarrollar el sentido de abstracción de distintas maneras: generalización de patrones, generalización relacionada con propiedades de operaciones numéricas, relación entre cantidades, introducción a la notación alfanumérica, etc. (Kieran *et al*., 2016). Es importante diferenciar entre los términos "álgebra temprana" y "pre-álgebra". El álgebra temprana se refiere al paso de la aritmética al álgebra –desde los tres años– a través de la generalización (Kieran *et al*. 2016), mientras que preálgebra hace referencia a la transición entre la aritmética y el álgebra a partir de los dos últimos cursos de primaria (Zapatera, 2018).

La perspectiva del Álgebra Temprana está íntimamente vinculada con una perspectiva del álgebra que la concibe como instrumento de modelización matemática, por encima de la tradicional visión de ésta como una mera generalización de la aritmética (Godino *et al*., 2014). En esta perspectiva no solo se enfatiza el aprendizaje de reglas para la manipulación simbólica, sino que se destaca la importancia de comprender qué hacer con las variables, ecuaciones, funciones y las operaciones entre estos elementos, lo que les otorga sentido –incluyendo a sus transformaciones. Así, el álgebra temprana se enfoca en la comprensión, producción y utilización de modelos algebraicos que permiten describir un fenómeno o situación. En este contexto, la generalización de patrones numéricos se presenta como una opción para el trabajo y desarrollo del álgebra desde esta perspectiva (Sánchez, 2013).

La generalización de patrones numéricos consiste en el reconocimiento de reglas a partir de una regularidad observada en la cual se identifica un patrón que se extiende más allá del caso (Merino *et al*., 2013). Para Blanton (2011), la adquisición de la abstracción mediante la generalización de patrones se desarrolla a través de la generalización, representación, justificación y razonamiento de relaciones matemáticas. Es importante destacar que, por lo general, los estudiantes de edades tempranas pueden extender un patrón a un lugar cercano o próximo. Sin embargo, cuando ellos son capaces de extender deliberadamente un patrón a un lugar lejano o a $n$-esimo lugar, y el proceso para resolver la situación se explica con un lenguaje natural, se puede afirmar que los estudiantes poseen una competencia algebraica temprana (Kaput & Blanton, 2001). La generalización cercana puede realizarse por medio del conteo o dibujos, mientras que la generalización lejana requiere encontrar una regla general (Merino *et al*., 2013).

Al poner énfasis en lograr que los estudiantes puedan realizar modelizaciones de fenómenos o situaciones, como en el caso de los patrones numéricos a través de su generalización, el análisis del desarrollo del razonamiento algebraico en las respuestas de los estudiantes ante diferentes tareas puede realizarse a través de los cuatro niveles de algebrización de la actividad matemática (Cervantes-Barraza *et al*., 2019; Godino *et al*., 2014). Esto niveles son los siguientes:

*Nivel cero o ausencia de razonamiento algebraico*. Los objetos intervinientes son expresados mediante un lenguaje natural, numérico o gestual. Pueden presentarse símbolos, pero estos hacen referencia a un valor desconocido que se obtiene como resultado de operaciones particulares. Se puede reconocer la regla recursiva que interviene en una tarea de generalización, es decir, que relaciona un término con el siguiente y aplicarla a casos particulares. De este modo, intervienen números particulares sobre los que se aplican operaciones aritméticas y de los que se obtiene un resultado (Figura 1).

**Figura 1**

*Ejemplo de respuesta del nivel cero ante un problema (tomado de Godino et al., 2014, p. 207)*

El ayuntamiento plantó al comienzo de la primavera 25 cajas de petunias. Cada caja contenía 20 petunias. Tras unos días de sequía murieron 72 petunias. ¿Cuántas quedan aún?

Un alumno puede razonar del siguiente modo:

El número total de petunias que se plantaron fueron 25 cajas, por 20 petunias en cada caja, total 500 petunias. Como después se estropearon 72, habrá que descontarlas del total, o sea, quedan 500-72=428; 428 petunias.

*Nivel uno o incipiente de algebrización*. Se reconoce una generalización y/o se establecen relaciones entre variables utilizando el lenguaje natural, numérico y gestual, en lugar del simbólico-literal. En tareas relacionadas con las propiedades estructurales de las relaciones aritméticas y algebraicas, se aplican y reconocen las relaciones de las operaciones implicadas. Puede haber la intervención de símbolos, pero no se opera con ellos (Figura 2).

**Figura 2**

*Ejemplo de respuesta del nivel uno ante un problema (tomado de Godino et al., 2014, p. 208)*

*Ejemplo 5:* continúa la siguiente secuencia: rojo, azul, azul, rojo, azul, azul, etcétera.
Un alumno razona de la siguiente manera: después de un rojo, siempre siguen dos azules y después de dos azules sigue un rojo.
El alumno que razona de esta manera reconoce una regla general compatible con el conjunto finito de elementos dados que le permite ir generando sucesivamente los términos de la secuencia. Consideramos esta actividad de nivel 1 de algebrización. Si el alumno se limita a escribir los términos que siguen en algunos casos, sin expresar alguna regla general, la actividad sería de nivel 0.

*Nivel dos o intermedio de álgebra*. Se expresan indeterminadas o variables en un lenguaje simbólico literal para referirse a objetos, pero se establece en el contexto espacio temporal de la tarea que se enfrenta. Esto conduce a que la expresión algebraica que aparece se ajuste a la descripción o reconocimiento que lleva a esta (Figura 3). Así, elementos como ecuaciones y funciones se presentan en un nivel más operacional que formal. En tareas que implican ecuaciones –tareas estructurales– se trabajan con las de la forma $Ax + B = C$, mientras que, en tareas funcionales, se logra establecer la generalidad, pero no se pueden transformar las expresiones para llevarlas a sus formas canónicas o equivalentes.

**Figura 3**

*Ejemplo de respuesta del nivel dos ante un problema (tomado de Godino et al., 2014, pp. 210-2011)*

*Ejemplo 9 (secuencia de figuras con palillos)*:[2] en la figura 3, ¿cuántos palillos son necesarios para formar el dibujo situado en la posición cuarta? ¿Y para formar el dibujo que estuviera en la posición 50? ¿Y para la posición 100?

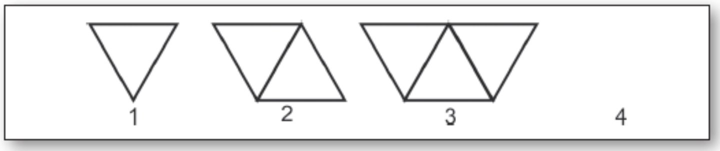



Fig. 3.

*Solución*: la secuencia de figuras está formada por triángulos; cada triángulo requiere 3 palillos, luego la figura en la posición $n$ requiere $3n$ palillos. Pero al poner juntos los triángulos se eliminan palillos; en la figura 2.ª se elimina 1, en la 3.ª se eliminan 2, en la 4.ª se eliminan 3. O sea, la fórmula general será $3n-(n-1)$. Para la figura 50, se necesitan 101 palillos y para la 100, 201.

*Nivel tres*. Se utiliza la simbolización e intervienen indeterminadas incógnitas, ecuaciones, variables y funciones representados de manera simbólica literal, y se opera con ellos. Además, se pueden realizar transformaciones a las estructuras algebraicas manteniendo su equivalencia, y se permite expresar formulaciones simbólicas de reglas canónicas de expresiones de funciones y patrones (Figura 4).

**Figura 4**

*Ejemplo de respuesta del nivel tres ante un problema (tomado de Godino et al., 2014, p. 200)*

Hay seis asientos entre sillas y taburetes. Las sillas tienen cuatro patas y los taburetes tienen tres. En total hay 20 patas. ¿Cuántas sillas y cuántos taburetes hay?

El estudiante B resolvió el problema de la siguiente manera:

Sea $T$ el número de taburetes y $S$ el número de sillas. Como el total de taburetes y sillas deben sumar 6, entonces, $T+S=6$. Por otro lado, se debe tener un total de 20 patas entre los taburetes y las sillas, esto es, $3T+4S=20$. Como de $T+S=6$ , se obtiene que $T=6-S$; por tanto, $3(6-S)+4S=20$, de donde $18+S=20$, obteniéndose finalmente que $S=2$. Si $S=2$, entonces $T=4$. Se deben tener 4 taburetes y 2 sillas para tener una total de 20 patas.

Esta investigación se enfocará exclusivamente en que los estudiantes alcancen el nivel dos, el cual corresponde a lo propuesto por el álgebra temprana. Además, investigaciones previas como la de Zapatera (2022) han demostrado que los estudiantes de primaria –6-12 años– tienen dificultades para la manipulación simbólica. El nivel tres puede ser introducido hacia el final de la primaria o en el siguiente nivel educativo, en este caso, la secundaria.

Al adoptar un enfoque centrado en tareas funcionales (Godino *et al*., 2014), en particular, la generalización de patrones, se reconoce la importancia del desarrollo del Pensamiento Variacional de los estudiantes, el cual implica el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la transformación y el cambio en diferentes contextos y situaciones (Mejía, 2018). Para comprender una situación de cambio, es necesario que las personas que las enfrentan puedan estudiar las relaciones entre variables, el estudio de patrones y regularidades, así como la modelación de dichas situaciones para su generalización a través del lenguaje matemático (Vargas Acosta & Sotillo Fajardo, 2019). Este enfoque también implica reconocer la importancia de las diferentes representaciones que pueden estar implicadas en estas tareas funcionales de generalización. Pinto & Cañadas (2021) realizaron una revisión sobre la importancia de tales representaciones y señalaron el papel fundamental del lenguaje y de las representaciones pictóricas y manipulativas. Esto motiva a que en este trabajo se plantee el MS –descrito en la siguiente sección– como la base para orientar la elaboración de las tareas del diseño didáctico propuesto en este trabajo.

## MÉTODOLOGÍA

Esta propuesta didáctica se fundamenta en la Investigación Basada en Diseño (IBD), cuyo propósito es relacionar la práctica educativa y la teoría. Esta metodología se centra en desarrollar teorías a través del diseño de métodos, materiales educativos o pruebas empíricas para apoyar el aprendizaje de un dominio específico (Bakker & van Eerde, 2015). El objetivo principal es observar las ventajas y desventajas del diseño, permitiendo realizar ajustes durante su aplicación para facilitar el aprendizaje significativo en los estudiantes. De esta manera, el diseño se evalúa y valida a través de los resultados de su implementación y el logro de los objetivos previamente establecidos. La IBD consta de tres fases (Bakker & van Eerde, 2015):

*Preparación y diseño*. Implica la búsqueda y análisis de información que permita seleccionar y/o diseñar una serie de actividades que puedan utilizarse con el objetivo de promover el aprendizaje de los estudiantes.

*Experimentos de enseñanza*. Se lleva a cabo la implementación de las actividades y se recopilan datos sobre el desempeño de los estudiantes.

*Análisis retrospectivo*. Se determinan los aprendizajes del grupo de estudiantes en diferentes etapas de la actividad y se comparan con lo esperado para determinar la pertinencia del diseño. También se generan reflexiones y propuestas de mejora que podrían realizarse para promover los aprendizajes pretendidos.

Para la fase de preparación y diseño, se empleó el MS, el cual promueve que los conceptos matemáticos se adquieran a través de un enfoque concreto-pictórico-abstracto. Este método está compuesto por tres fases correlacionadas. En la primera fase, los estudiantes manipulan material concreto para comprender los conceptos. En la segunda fase, ellos crean representaciones gráficas para visualizar los conceptos. En la última fase, los estudiantes resuelven la misma situación de manera abstracta, utilizando símbolos y operaciones matemáticas (Satué & Manero, 2019; Tapia Reyes & Murillo Antón, 2020).

Para la elaboración de la propuesta didáctica se retomaron resultados de los estudios analizados y de aspectos didácticos relativos con los procesos de generalización de patrones. A continuación, se describen los problemas de cada actividad y sus objetivos. A continuación, se describen los problemas de cada actividad y sus objetivos:

*Actividad uno*. Una maestra colocó en los mosaicos del salón triángulos y cuadrados para adornar. De la siguiente manera –ver Anexo 1, Imagen 1. En equipos ayudan a la maestra a continuar con la decoración. Con esta actividad se buscaba introducir un proceso de generalización que no abarcara aspectos numéricos para contrastar con la generalización numérica de las otras actividades.

*Actividad dos*. Una arquitecta está haciendo planos para construir un edificio, cada edificio debe tener dos ventanas –ver Anexo 1, Imagen 2. En equipos ayudan a la arquitecta a saber cuántas ventanas se necesitan dependiendo del número de pisos. Con esta actividad se busca que los estudiantes den interpretación a representaciones simbólicas y la asocien con la generalización establecida en el problema. Así, es una introducción al proceso de generalización simbólica.

*Actividad tres*. Para el cumpleaños de Isabella, su papá está haciendo flores con globos. Las flores están formadas por uno amarillo en el centro y cuatro rosas como pétalos –ver Anexo 1, Imagen 3. Esta actividad pretende que los estudiantes realicen procesos de generalización abstracta a través del lenguaje que favorezca el tránsito a lo simbólico.

*Actividad cuatro*. En un salón de fiestas, Carlos coloca mesas para los invitados. A cada lado de las mesas debe colocar una silla –ver Anexo 1, Imagen 4. Ayuda a Carlos a saber cuántas sillas debe poner dependiendo del número de mesas. Tomada de Carraher *et al.* (2008), esta actividad pretende que los estudiantes realicen procesos de generalización abstracta simbólica.

En cada una de las actividades anteriores se promueve el desarrollo de las tres fases del MS. Cada actividad posee un material didáctico que se debe manipular –ver Anexo 1– para responder su inciso. En la Tabla 1 se describen las preguntas realizadas en cada actividad, así como la etapa del método singapur y el nivel del álgebra alcanzado en cada una de las tareas. La relación entre las preguntas de las actividades, las etapas del MS y los niveles del álgebra se describe en la Tabla 1. Cabe mencionar que cada una de las preguntas fueron creadas por los investigadores y sometidas a un proceso de validación durante la fase de *análisis retrospectivo*, según la metodología de la IBD.

**Tabla 1**

*Relación entre las preguntas de las actividades, el método Singapur y los niveles del álgebra*

| Actividad | Pregunta | Etapa del método | Nivel de álgebra |
|---|---|---|---|
| 1 | a) Continuar con la decoración del salón. | Concreta | 0 |
| | b) Dibujar la decoración hasta el mosaico 9. | Pictórica | 0 |
| | c) ¿Qué figura debería ir en el mosaico 24? | Abstracta | 1 |
| 2 | a) Arma con el material un edificio con 5 pisos. | Concreta | 0 |
| | b) ¿Cuántas ventanas tendría el edificio? | Concreta | 1 |
| | c) Dibuja un edificio que tenga 7 pisos. | Pictórica | 1 |
| | d) Si se construye un edificio con 30 pisos, ¿Cuántas ventanas tendrá? | Abstracta | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | e) Escoge la fórmula que le podría ayudar a la arquitecta a saber cuántas ventanas debe poner de acuerdo con el número de pisos. | Abstracta | 2 |
| 3 | a) Armen cuatro flores para saber cuántos globos se necesitan. | Concreta | 0 |
| | b) Dibujen seis flores para saber cuántos globos rosas se necesitan. | Pictórica | 1 |
| | c) ¿Cuántos globos se necesitarán para hacer 24 flores? | Abstracta | 1 |
| | d) En equipo, escriban qué tiene que hacer el papá de Isabella para saber cuántos globos se necesitarán. | Abstracta | 1 |
| | e) Escriban una fórmula que le pueda ayudar al papá de Isabella a saber cuántos globos rosas se necesitan para armar muchas flores. | Abstracta | 2 |
| 4 | a) ¿Cuántas sillas se necesitan para armar una mesa? | Concreta | |
| | b) En equipo, acomoden las sillas que se necesitan para armar 4 mesas. | Concreta | 0 |
| | c) Dibuja cómo sería la distribución de las mesas y sillas si se pusieran 6 mesas. | Pictórica | 0 |
| | d) ¿Cómo lo supieron? | Abstracta | 1 |
| | e) ¿Cuántas sillas se necesitan si se pusieran 22 mesas juntas? | Abstracta | 1 |
| | f) En equipo crean una fórmula que les permita saber ¿Cuántas sillas se necesitaran dependiendo el número de mesas? | Abstracta | 2 |

La experimentación de enseñanza –segunda fase de la IBD– se llevó a cabo a un nivel micro (Prediget e*t al*., 2015), es decir, se llevó a cabo con una muestra de siete estudiantes de cuarto grado de primaria –9-10 años– de una escuela privada de San Luis Potosí, México. Estos estudiantes fueron seleccionados mediante un muestreo no probabilístico por conveniencia (Otzen & Materola, 2017), es decir, se seleccionaron según su disposición a participar en la investigación, para lo cual se les pidió que firmaran un consentimiento informado. Para la implementación del diseño didáctico, se formaron tres equipos al azar, dos de los cuales estuvieron conformados por dos estudiantes y uno por tres. La aplicación de las cuatro actividades con cada equipo se llevó a cabo mediante una práctica controlada, es decir, se realizó con cada equipo por separado, participando únicamente la investigadora y los estudiantes del equipo correspondiente. La aplicación de las cuatro actividades con cada equipo duró aproximadamente 50 minutos. Al inicio de cada actividad, se distribuyó el material didáctico requerido y la hoja de trabajo, para luego pedir a los estudiantes que leyeran las instrucciones y las resolvieran en equipo. Todas las sesiones fueron videograbadas para su posterior análisis.

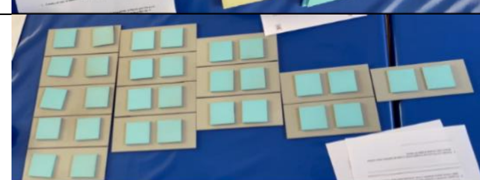
Finalmente, en el *análisis retrospectivo* –tercera fase del IBD– se visualizaron las videograbaciones y las hojas de trabajo con el propósito de realizar un análisis entre los objetivos planteados en las actividades y los aprendizajes alcanzados. Para esto, se revisaron las respuestas de los estudiantes, las estrategias de resolución y las argumentaciones dadas por ellos en las sesiones sobre dichas respuestas y estrategias –Tabla 2 a la Tabla 6. En otras palabras, para todas las actividades se buscó analizar si los estudiantes fueron capaces de identificar el patrón de comportamiento de manera verbal y generalizarlo; mientras que para las actividades 2, 3 y 4 se examinó si los estudiantes podían identificar, comprender y plantear la fórmula, respectivamente. Las acciones realizadas para responder y las respuestas dadas fueron analizadas para ubicarlas en un cierto nivel de algebrización. Una vez realizado esto, se determinó la pertinencia del diseño y se determinó si era necesario realizar cambios en las actividades para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje y los resultados obtenidos.

## ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS

El análisis de las respuestas de los estudiantes muestra que todos son capaces de identificar y realizar generalizaciones cercanas de los patrones, empleando el material manipulable (Tabla 2). Es importante mencionar que, para construir la siguiente figura del patrón en las cuatro actividades –acción solicitada en cada primer inciso de las actividades de la Tabla 1–, los estudiantes necesitan reconocer cómo se forma este elemento. La respuesta se asocia con el nivel cero del desarrollo del álgebra y se desarrolla como parte de la etapa concreta del MS. En la actividad 1, no se trabajan aspectos numéricos que sean simbolizables.

**Tabla 2**

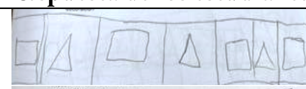
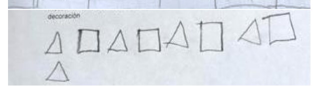
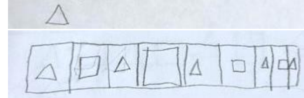
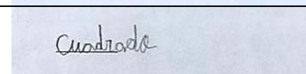
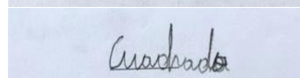
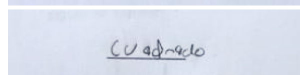
*Resolución del inciso a) de todas las actividades*

| Actividad | Indicación | Respuesta de los estudiantes |
|---|---|---|
| 1 | a) Continúa con la decoración del salón y pon las figuras que faltan hasta el lugar 7. |  |
| 2 | a) Armen con el material un edificio con 5 pisos. ¿Cuántas ventanas tendrá el edificio? |  |
| 3 | a) Armen 4 flores y ayuden al papá de Isabella a saber cuántos globos rosas se necesitan. |  |
| 4 | a) En equipo, acomoden las sillas que se necesitan para 4 mesas. |  |

Esto último se planteó considerando que la actividad 1 sea introductoria y “fácil” de resolver, permitiendo la identificación de la regla de generalización de la secuencia de figuras –triángulo, cuadrado, triángulo, cuadrado, etc. –para determinar aquella que corresponde al lugar 24. Se esperaba que los estudiantes reconocieran que los triángulos ocupaban posiciones impares y los cuadrados en posiciones pares. Por lo tanto, en el lugar 24 habría un cuadrado. No obstante, los estudiantes dibujaron la secuencia completa hasta la posición 24 para determinar la figura solicitada (Tabla 3). Esta acción evidencia un nivel cero de desarrollo del álgebra, ya que son capaces de reconocer el patrón de comportamiento, pero no emplear una regla general para determinar la figura lejana solicitada.

**Tabla 3**

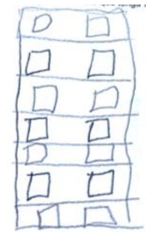
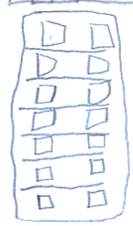
*Resolución de la actividad 1, incisos b) y c)*

| Equipo | Indicación | Respuesta de los estudiantes |
|---|---|---|
| 1 | b) Dibujen la decoración en el siguiente espacio incluyendo la figura que iría en el mosaico número 9. |  |
| 2 | |  |
| 3 | |  |
| 1 | c) Comenten entre ustedes y ayuden a la maestra a saber qué figura irá en el mosaico 24 continuando con el orden de la decoración. |   |
| 2 | |   |
| 3 | |   |

En la actividad 2 (Tabla 4), al igual que en la actividad 1, los estudiantes fueron capaces de extender el trabajo de generalización realizado con el material manipulable, por medio del trabajo pictórico solicitado en el inciso b). Además, en este caso, se observó que los estudiantes pudieron emplear la regla general para realizar operaciones aritméticas y determinar el número de ventanas que tendrá un edificio de 30 pisos –inciso c). Así, se evidencia que ellos pudieron reconocer la relación aritmética entre el número de pisos y ventanas establecida en la secuencia planteada. Por su parte, también fueron capaces de resolver el inciso d), es decir, reconocer la fórmula que expresa dicha relación. El desempeño en estos dos últimos incisos indica el desarrollo del nivel 1 de algebrización, ya que las operaciones involucradas se realizan sobre la relación aritmética identificada.

**Tabla 4**

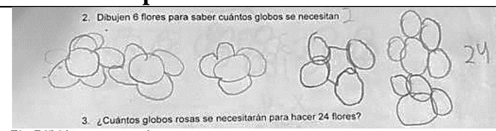
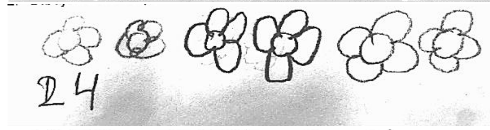
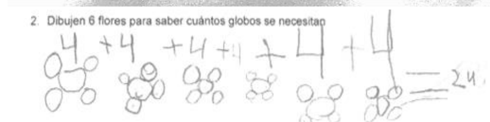
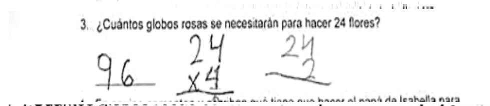
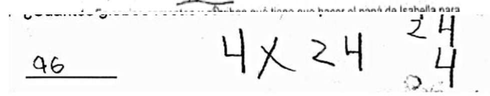
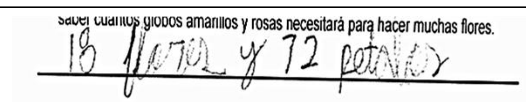
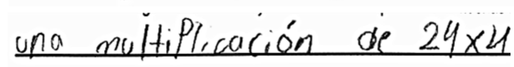
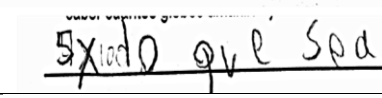
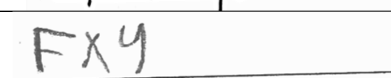
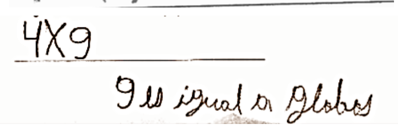
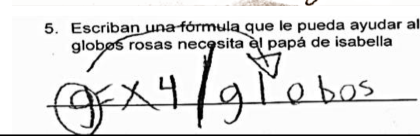
*Resolución de la actividad 2, incisos b), c) y d)*

| Equipo | Indicación | Respuesta de los estudiantes |
|---|---|---|
| 1 | |  |
| 2 | b) Dibujen un edificio que tenga 7 pisos. ¿Cuántas ventanas tendrá el edificio? |  |
| 3 | |  |
| 1 | | 60 |
| 2 | c) Si se construyera un edificio de 30 pisos ¿cuántas ventanas tendrá? | 60 $\begin{array}{r} 30\times \\ 2 \\ \hline 60 \end{array}$ |
| 3 | | 60 |
| 1 | | a) Vx2 b) Px2 c) Vx4 |
| 2 | d) Escoge la fórmula que le podría ayudar a la arquitecta cuantas ventanas debe poner de acuerdo con número de pisos. | a) Vx2 b) Px2 c) Vx4 |
| 3 | | b) Px2 ~~c) Vx4~~ |

En la actividad 3 (Tabla 5), para los incisos b) y c), los estudiantes utilizaron las mismas estrategias de resolución y niveles de algebrización que para la actividad 2. Pudieron realizar la representación pictórica del patrón para establecer una operación aritmética que permitiera calcular el número en la posición 24 del patrón, esto es, la multiplicación de 4 por 24. Esto refuerza la evidencia del desarrollo del nivel 1 de algebrización, enmarcado en la etapa abstracta del MS.

**Tabla 5**

*Resolución de actividad 3, incisos b), c), d) y e)*

| Equipo | Indicación | Respuesta de los estudiantes |
|---|---|---|
| 1 | b) Dibujen 6 flores para saber cuántos globos se necesitan. |  |
| 2 | |  |
| 3 | |  |
| 1 | c) ¿Cuántos globos rosas se necesitarán para hacer 24 flores? |  |
| 2 | |  |
| 3 | |  |
| 1 | d) En equipo comenten y escriban qué tiene que hacer el papá de Isabella para saber cuántos globos amarillos y rosas se necesitan para hacer muchas flores. |  |
| 2 | |  |
| 3 | |  |
| 1 | e) Escriban una fórmula que le pueda ayudar al papá de Isabella a saber cuántos globos rosas necesita el papá de Isabella. |  |
| 2 | |  |
| 3 | |  |

Para el inciso d) de la actividad 3 (Tabla 5), se buscó que los estudiantes comenzaran a transitar del nivel 1 al 2 de algebrización para tomar conciencia de las cantidades que varían y las cantidades constantes que forman parte de la regla de generalización. Solo el equipo 3 planteó una descripción –*5 x lo que sea*– que involucra explícitamente la idea de algo desconocido. Es importante mencionar que los estudiantes expresaron que era el número 5 porque cada flor tiene 5 globos, esto es, 4 pétalos y un centro. Estos valores son necesarios para elaborar diferentes cantidades de flores. Por lo tanto, se puede intuir que existió una inadecuada comprensión de la idea de “muchas flores” en la instrucción, ya que estos equipos interpretaron la indicación como la necesidad de dar un valor concreto, pero relativamente grande. Por esta razón, esta pregunta debe reformularse en una nueva implementación.

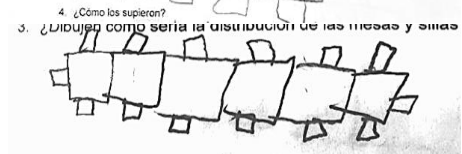
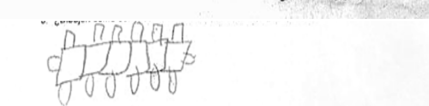
El inicio de la transición del nivel 1 al nivel 2 se evidencia con mayor facilidad en las respuestas para la pregunta e) (Tabla 5). En esta pregunta, los tres equipos lograron expresar, en lenguaje simbólico, la fórmula para calcular los globos necesarios como pétalos para diferentes cantidades de flores. El equipo uno estableció que la fórmula era $f \times 4$, indicando que la $f$ representaba a las flores. Por su parte, el equipo dos escribió $4 \times g$, en donde $g$ representaba a globos, y el equipo tres estableció como respuesta $g \times 4$, donde un estudiante señaló que $g$ representaba “lo que sea”, mientras que otro estudiante indicó que $g$ representaba a los globos. Como se puede observar, en los últimos dos equipos hubo dificultades para identificar correctamente la variable implicada. Sin embargo, los estudiantes comprendieron que la fórmula implica multiplicar por 4 una cierta cantidad variable.

Con base en las respuestas de los incisos descritos en los párrafos anteriores, se puede evidenciar que los estudiantes comenzaron a hacer uso de la simbolización dentro de la etapa abstracta del MS para representar una variable que es desconocida en ese momento y que describe la generalización del patrón que se analiza. Esto indica un grado de desarrollo del nivel dos de algebrización en los estudiantes.

Por último, en la actividad 4 (Tabla 6), los tres equipos obtuvieron los mismos resultados en los primeros tres incisos. Como en las actividades anteriores, las respuestas de los estudiantes para los incisos de b), c) y d) evidencian un desarrollo del nivel 1 de algebrización, ya que ellos identifican la regla de generalización implicada y son capaces de abstraer las operaciones aritméticas involucradas para calcular los valores de la secuencia planteada. Por ejemplo, al determinar las sillas necesarias al colocar 22 mesas, los estudiantes realizaron la multiplicación $22 \times 2$, para luego sumar a esa cantidad las 2 sillas de las cabeceras. Esto lo desarrollaron a partir del trabajo de las etapas concreta y pictórica del MS, ya que los estudiantes indicaron que la estrategia de contar las sillas les permitió reconocer cuántas de estas se necesitaban, ayudándoles a reconocer las relaciones implicadas en la generalización.

**Tabla 6**

*Resolución de actividad 4, incisos b) al e)*

| Equipo | Indicación | Respuesta de los estudiantes |
|---|---|---|
| 1 | |  |
| 2 | b) Dibujen cómo sería la distribución de las mesas y sillas si se pusieran 6 sillas |  |
| 3 | |  |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | | 4. ¿Cómo los supieron? sumando las sillas |
| 2 | c) ¿Cómo lo supieron? | 4. ¿Cómo los supieron? Pusimos 6 mesas y las dibujamos y luego las contamos. |
| 3 | | 4. ¿Cómo los supieron? pusimos 5 sillas más y 2 mesas |
| 1 | | 46 |
| 2 | d) ¿Cuántas sillas se requieren si se pusieran 22 mesas juntas? | 46   22 × 2 = 44 |
| 3 | | 46   22 × 2 = 44 |
| 1 | | m×2 +2 |
| 2 | e) En equipo crean una fórmula que le permita a Carlos saber cuántas sillas se necesitaran dependiendo del número de mesas. | 2×c+2 |
| 3 | | s×2+2 |

Finalmente, en el inciso e), los estudiantes también demostraron estar en la etapa abstracta del MS y evidenciaron un grado de desarrollo del nivel 2 de algebrización. Ellos fueron capaces de establecer la fórmula para calcular la cantidad de sillas necesarias según el número de mesas colocadas, es decir, emplearon variables para expresar las relaciones implicadas en el patrón que se generaliza. El equipo 1 indicó que la fórmula era $m \times 2\ +\ 2$, asignando la letra $m$ a las mesas. El equipo 2 señaló que la fórmula que representa la situación era $2 \times c + 2$, en donde $c$ era igual a sillas. Mientras tanto, la respuesta del equipo 3 fue $s \times 2\ + 2$, siendo $s$ igual a sillas. En los últimos dos equipos se observaron dificultades para representar la variable de manera correcta, sin embargo, fue posible identificar que los estudiantes comprendían que se tenía que crear una fórmula en donde existiera una variable que se multiplicara por 2 y se agregara el valor 2, representativo de las sillas de la cabecera. Cabe recalcar que en el equipo 3, un estudiante tuvo la capacidad de generalizar y pensar en una letra en lugar de un número, y sus compañeros tuvieron mayor dificultad para comprender que se tenía que reemplazar una letra por un número, por lo que él les explicó, lo que ayudó a que todo el equipo pudiera simbolizar la situación.

Aquí se habla de un grado de desarrollo del nivel 2 ya que, si bien las variables no son las correctas en algunas expresiones, los estudiantes argumentaron correctamente qué valor debía sustituirse por el símbolo indicado en la fórmula. Así, se presenta un error en la denominación o nomenclatura de la variable, pero se tiene una correcta interpretación del sentido sintáctico y semántico de la expresión algebraica formulada y de los valores a sustituir en esta.

## DISCUSIÓN

Autores como Merino *et al*. (2013) han establecido que la generalización de patrones no debe abordarse en educación primaria de la misma manera que en niveles superiores, por lo que se elaboró el diseño didáctico se realizó basado en el Método Singapur (MS) y los niveles de algebrización. Dichos niveles se utilizaron para establecer modelos que generalizan los patrones de las actividades del diseño, y se generaron las siguientes etapas de trabajo de manera exitosa: (i) completar un patrón figural empleando material concreto para posiciones inmediatas; (ii) extender un patrón numérico de forma pictórica para posiciones cercanas; (iii) aritmetizar las relaciones del patrón para calcular posiciones lejanas. En este caso se trabajaron patrones de la forma $ax + b$; (iv) identificar la fórmula que generaliza al patrón; (v) establecer la fórmula que generaliza al patrón.

A partir de la aplicación del diseño didáctico, se observó que todos los estudiantes identificaron el patrón de comportamiento de las secuencias presentadas en las cuatro actividades, lo que corresponde al nivel 0 del álgebra temprana. Para lograr esto, el uso del material concreto en la etapa concreta favoreció el interés de los estudiantes por las actividades y les permitió analizar, manipular y continuar el patrón para una posición siguiente. Además, pudieron extender o continuar ese patrón para posiciones subsiguientes, mediante la representación pictórica de la secuencia en la etapa pictórica. Las discusiones sobre la generalización de patrones se llevaron a cabo utilizando el lenguaje natural (Merino *et al*., 2013).

Al trabajar la generalización lejana del patrón (Merino *et al.*, 2013) en la etapa abstracta, se favorece el tránsito del nivel 0 al nivel 1 del álgebra temprana, ya que en este punto los estudiantes comenzaron a establecer relaciones aritméticas entre las variables de las secuencias propuestas en las actividades. Este progreso se evidencia de manera más clara en la actividad 2, donde los estudiantes deben identificar la fórmula que generaliza las relaciones aritméticas planteadas. A partir de la implementación del diseño didáctico, los alumnos demostraron un grado de desarrollo del nivel 2 de algebrización. Esto se evidencia cuando los estudiantes proponen las fórmulas para calcular los valores de las secuencias en las actividades 3 y 4. Sin embargo, se observaron dificultades en la identificación de la variable adecuada ya que, aunque la fórmula planteada fue correcta, los equipos dos y tres definieron la variable de manera incorrecta. No obstante, esto no significa que los estudiantes no hayan tenido una comprensión, ya que pudieron realizar los cálculos aritméticos de manera apropiada.

Los resultados de este estudio difieren de lo reportado por Zapatera (2022), quien indica que los estudiantes de 3° grado y 4° grado –8-10 años– presentan dificultades en el proceso de generalización y solo aquellos de 5° grado y 6° grado –10-12 años– pueden completar estos procesos utilizando una regla general. Los datos recopilados en nuestro trabajo evidencian que los estudiantes de 4° grado –9-10 años– fueron capaces de identificar una regla de sucesión, realizar una generalización cercana y lejana, y establecer un modelo de simbolización algebraica.

Aunque alcanzar el nivel 3 de algebrización no se planteó como objetivo –consultar el marco teórico–, lo mencionado anteriormente sugiere que podría ser posible que los estudiantes hayan tenido dificultades para llegar a este nivel, el cual implica la manipulación simbólica de las variables establecidas ($S \times 2 + 2$). Sin embargo, al obtener los resultados, consideramos importante que en un nuevo estudio se evalúe la posibilidad de alcanzar el nivel 3.

Por último, es importante reflexionar sobre lo ocurrido en la actividad 1. Esta tenía como objetivo introducir a los estudiantes a los patrones y a los procesos de generalización desde una perspectiva de encontrar una regla general, sin que esta sea simbólica. Sin embargo, los estudiantes, al no poder expresar dicha regla general, se vieron en la necesidad de dibujar toda la secuencia hasta la posición 24 del patrón (generalización lejana) para determinar la figura que ocuparía dicha posición. Se consideró inicialmente que este proceso de resolución sería sencillo y que la simbolización sería fácil, pero resultó ser más complejo. Esto podría deberse a la naturaleza de la regla, que implica conceptos de números pares e impares, ya que los estudiantes debían determinar que para posiciones pares de la secuencia se coloca un cuadrado y para posiciones impares un triángulo, para luego determinar si 24 es par o impar. De este modo, la generalización no es propiamente numérica ni implica relaciones simbólicas, sino que tiene una naturaleza más compleja desde el punto de vista de la exigencia cognitiva de la regla a establecer. Por lo tanto, es importante replantear la pertinencia de esta actividad como inicial o incluir actividades previas que permitan recuperar conocimientos sobre los números pares e impares.

## CONCLUSIONES

El álgebra temprana desempeña un papel fundamental en el desarrollo del pensamiento matemático, ya que proporciona a los estudiantes la oportunidad de explorar situaciones abstractas y desarrollar habilidades de generalización. Estas habilidades son esenciales para una comprensión más profunda del álgebra en niveles educativos posteriores. Por lo tanto, su implementación ha cobrado una gran relevancia en los últimos años, lo que resalta la importancia de establecer estrategias efectivas para su enseñanza.

La aplicación del diseño didáctico en este estudio permitió que los estudiantes alcanzaran el nivel dos del álgebra temprana, lo que implica que pudieron formular reglas generales mediante la simbolización, incorporando incógnitas y variables. Los resultados revelan cómo las etapas del Método Singapur facilitaron que los estudiantes identificaran los patrones presentes en las secuencias de las actividades y avanzaran hacia su generalización. En la etapa concreta, los estudiantes mostraron un interés particular y pudieron enfocarse en el patrón observado, gracias a la manipulación del material didáctico que les permitió realizar inferencias precisas sobre su comportamiento. Es importante destacar que, durante la aplicación, los estudiantes recurrieron constantemente al material didáctico, lo que les ayudó a comprender el patrón y a progresar hacia la generalización.

La etapa pictórica resulta crucial ya que obliga a los estudiantes a extrapolar el patrón y fortalece su comprensión de este. Además, al dibujar los patrones, los estudiantes comprenden mejor las operaciones aritméticas necesarias para calcular posiciones lejanas, como se requiere en las etapas abstractas. Por ejemplo, en la actividad 4, al calcular el número de sillas necesarias alrededor de cierta cantidad de mesas, al contar las sillas y realizar los dibujos, los estudiantes identificaron que multiplicar por 2 el número de mesas y luego sumarle 2 al resultado produciría el número correcto de sillas. Esta última operación corresponde a las sillas que debían colocarse en los extremos del acomodo de las mesas. Finalmente, en la etapa abstracta, se pide que se establezca la fórmula que generaliza el patrón. Frente a esta tarea, los estudiantes lograron identificar el papel de la variable en cada actividad dentro de la fórmula solicitada, así como las relaciones de las cantidades constantes. Sin embargo, en algunos casos, la identificación correcta de la variable se presentó de manera diferenciada.

La aplicación de la actividad en equipos puede llevar a que algunos miembros impongan sus ideas a los demás, lo que podría inhibir la participación equitativa y la colaboración. Por lo tanto, para futuras aplicaciones, sería recomendable considerar la realización de la actividad de manera individual seguida de sesiones de interacción grupal, lo que permitiría un mayor involucramiento de todos los estudiantes y un espacio para el intercambio de ideas. Finalmente, añadir una evaluación previa habría permitido contrastar las ganancias de aprendizaje de los estudiantes antes y después de la implementación del diseño didáctico. Sin embargo, a pesar de esta limitación, el estudio logró identificar las variables necesarias para el progreso y evidenciar el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes. Es relevante destacar el logro demostrado por los estudiantes, especialmente considerando que no tenían instrucción previa en temas algebraicos. Este hecho resalta la importancia y el impacto del diseño didáctico en el aprendizaje de los estudiantes en el álgebra temprana.

## ACLARATORIAS

Los autores declaran no tener conflicto de interés alguno en relación con el desarrollo y la publicación de este estudio. La investigación fue financiada con recursos propios. La primera autora agradece profundamente al Dr. Cabrera por el tiempo dedicado, estar presente a pesar de la distancia y por ser un maestro y guía excepcional; al Dr. Galán por ser un excelente maestro y la orientación proporcionada; a la Lcda. Leticia Compeán por todo el apoyo brindado en la elaboración del material didáctico y la aplicación del diseño; a cada uno de mis profesores durante la licenciatura, porque sin la transmisión de sus conocimientos no hubiera sido posible lograr esta investigación; a cada una de las personas que estuvo a mi lado durante este proceso otorgando un apoyo incondicional; y finalmente, al centro donde se llevo a cabo la aplicación del diseño.

## REFERENCIAS

Alsina, Á. (2019). Del razonamiento lógico-matemático al álgebra temprana en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en La Infancia*, *8*(1), 1–19. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.1-19

Bakker, A., & van Eerde, D. (2015). An introduction to Design-Based Research with an example from statistics education. En: A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 429-466). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_16

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3–5. Essential understanding series.* National Council of Teachers of Mathematics. https://www.nctm.org/store/Products/Developing-Essential-Understanding-of-Algebraic-Thinking-for-Teaching-Mathematics-in-Grades-3-5/

Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. En: J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 137–159). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_10

Cabrera-Chim, L., Ruiz-Muñiz, P., Galaviz Pérez, P., & Galaviz Pérez, J. (2023). Estudio exploratorio sobre el pensamiento y lenguaje variacional en los libros de texto gratuitos de primaria en México. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 8*, 1-24. https://doi.org/10.46618/iime.181

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En: A. Estepa Castro, Á. Contreras de la Fuente, J. Deulofeu Piquet, M. C. Penalva Martínez, F. J. García García, & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). SEIEM 75. https://www.seiem.es/docs/actas/16/Actas16SEIEM.pdf

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM. Mathematics Education, 40*(1), 3-22. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7

Cervantes-Barraza, J., Valbuena, S., & Paternina, Y., (2019). Argumentos de estudiantes de primaria en el contexto de álgebra temprana. *Educación y Humanismo, 21*(37), 120-138. http://dx.doi.org/10.17081/eduhum.21.37.3459

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M., & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias, 32* (1), 199-219. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Hernández, P. (2014). *Propuesta didáctica para el desarrollo de procesos de razonamiento lógico matemático, desde el pensamiento variacional, con los estudiantes del grado cuarto de básica primaria del Colegio Cooperativo San Antonio de Prado, por medio de estrategias de enseñanza mediadas por los sistemas de gestión de aprendizaje durante el año 2014* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio institucional UN. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/53013.

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Part 1: Transforming task structures. En: H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 1, pp. 344–351). The University of Melbourne. http://hdl.handle.net/11343/35000

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016) *Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching. ICME-13 Topical Surveys.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2

Mejía, D. (2018). *Fortalecimiento del proceso de enseñanza del pensamiento variacional de los docentes de grado tercero y quinto de la institución educativa Pablo VI de Manizales.* [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio instituciona UN. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/64217

Merino, E., Cañadas, M., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24-40. https://doi.org/10.24197/edmain.1.2013.24-40

Minosso, A., & Panossian, M. L. (2023). Reconhecimento de grandezas variáveis por profesores dos Anos Iniciais: Um olhar pela teoria da objetivação. R*evista Venezolana de Investigación en Educación Matemática, 3*(3), 1-23. http://dx.doi.org/10.54541/reviem.v3i3.72

Otzen. T., & Manterola, C. (2017). Técnicas de muestreo sobre una población a estudio. *International Journal of Morphology*, *35*(1), 227-232. http://dx.doi.org/10.4067/S0717-95022017000100037

Pincheira Hauck, N., & Alsina, A. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática, 33*(1), 153-180. https://doi.org/10.24844/EM3301.06

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *33*, 113–134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. *ZDM. Mathematics Education*, *47*, 877–891. http://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0722-3

Ramos, P. L, A., Guifarro. M, I., Casas, G. L, M. (2021). Dificultades en el aprendizaje del álgebra, un estudio con pruebas estandarizadas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 35*(70), 1016-1033. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n70a21

Sánchez, A. (2013). *Características y elementos del pensamiento variacional y su correspondencia con la prueba saber 11*. [tesis de licenciatura, Universidad del Valle]. Biblioteca digital. https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/4790

Satué, O., & Manero, V. (2019). *Método Singapur, una aproximación a su enseñanza de las matemáticas* [tesis de licenciatura, Universidad Zaragoza]. ZAGUAN. Repositorio Institucional de Documentos. https://zaguan.unizar.es/record/85726?ln=es

Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2017). *Aprendizajes clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica.* SEP. https://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/10933/1/images/Aprendizajes_clave_para_la_educacion_integral.pdf

Tapia Reyes, R., & Murillo Antón, A. (2020). El método Singapur: sus alcances para el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Muro de la Investigación, 2*(5), 13-24. https://doi.org/10.17162/rmi.v5i2.1322

Ureña, J., Ramírez, R., Molina, M., & Cañadas, M. C. (2023). Generalization: strategies and representations used by sixth to eighth graders in a functional context. *Mathematics Education Research Journal*, 1-27. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00458-w

Vargas Acosta, L. M., & Sotillo Fajardo, E. X. (2019). *Efecto de la metodología singapur en el desarrollo de la competencia comunicación en el área de matemáticas para estudiantes de grado sexto.* [tesis de maestría, Universidad de la Costa]. Redicuc. https://repositorio.cuc.edu.co/handle/11323/5538.

Zapatera, A. (2018). Introducción del pensamiento algebraico mediante la generalización de patrones. Una secuencia de tareas para Educación Infantil y Primaria. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 97*(1), 51-67. https://scpmluisbalbuena.org/revista_numeros/097/

Zapatera, A. (2022). La generalización de patrones como herramienta para introducir el pensamiento algebraico en educación primaria. *Educación Matemática*, *34*(2), 134-156. https://doi.org/10.24844/EM3402.05

**Cómo citar este artículo:**

Azcona Chávez, M., & Cabrera Chim, L. M. (2024). Diseño didáctico para desarrollar el Álgebra Temprana en estudiantes de 9-10 años al generalizar patrones. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, *4*(1), e202410. https://doi.org/10.54541/reviem.v4i1.100

# ANEXO 1

**Imagen 1**

**Imagen 2**

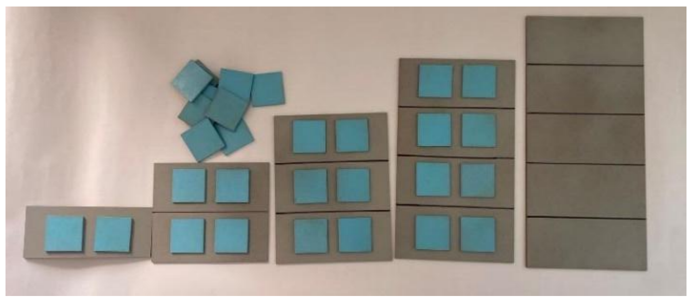


**Imagen 3**

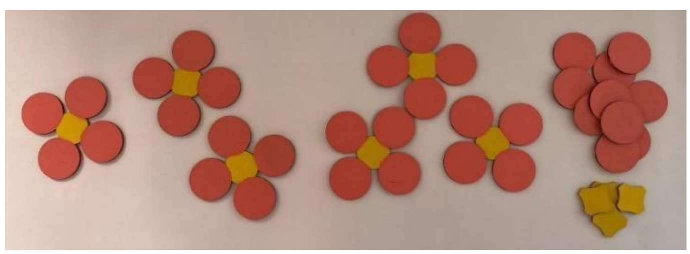


**Imagen 4**